Classi caratteristiche di fibrati vettoriali

Mattia Talpo

29 Giugno 2007

Introduzione

Entrambi i concetti vengono dalla geometria differenziale.

Fibrato tangente a una varietà differenziabile

$$TM = \coprod_{x \in M} T_x M$$

$$\downarrow$$

Fibrati vettoriali su spazi topologici

Fibrato $\approx$ famiglia continua di spazi omeomorfi, localmente fatta come un prodotto.

Le classi caratteristiche associano a ogni fibrato vettoriale una classe di coomologia dello spazio base, in modo da verificare alcune proprietà di funtorialità.

Introduzione

Entrambi i concetti vengono dalla geometria differenziale.

Fibrato tangente a una varietà differenziabile

$$TM = \coprod_{x \in M} T_x M$$

$$\downarrow$$

Fibrati vettoriali su spazi topologici

Fibrato $\approx$ famiglia continua di spazi omeomorfi, localmente fatta come un prodotto.

Le classi caratteristiche associano a ogni fibrato vettoriale una classe di coomologia dello spazio base, in modo da verificare alcune proprietà di funtorialità.

Introduzione

Entrambi i concetti vengono dalla geometria differenziale.

Fibrato tangente a una varietà differenziabile

$$TM = \coprod_{x \in M} T_x M$$

$$\downarrow$$

Fibrati vettoriali su spazi topologici

Fibrato $\approx$ famiglia continua di spazi omeomorfi, localmente fatta come un prodotto.
Le classi caratteristiche associano a ogni fibrato vettoriale una classe di coomologia dello spazio base, in modo da verificare alcune proprietà di funtorialità.

Fibrati vettoriali

Definizione

Un fibrato $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *a fibra* F *è una tripla* $\xi = (E, p, X)$, *dove:*

- $p : E \rightarrow X$ *è una funzione continua e surgettiva (proiezione)*
- *condizione di banalità locale: per ogni* $x \in X$ *esistono* $U \subseteq X$ *intorno di* x *e un omeomorfismo* $\phi_x : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ *(banalizzazione locale), tale che* $\pi_U \circ \phi_x = p$.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Un fibrato si dice banale se ha una banalizzazione con dominio E.

Fibrati vettoriali

Definizione

Un fibrato $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *a fibra* F *è una tripla* $\xi = (E, p, X)$, *dove:*

- $p : E \longrightarrow X$ *è una funzione continua e surgettiva (proiezione)*
- *condizione di banalità locale: per ogni* $x \in X$ *esistono* $U \subseteq X$ *intorno di* x *e un omeomorfismo* $\phi_x : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ *(banalizzazione locale), tale che* $\pi_U \circ \phi_x = p$.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Un fibrato si dice banale se ha una banalizzazione con dominio E.

Definizione

Un fibrato vettoriale complesso di rango n è un fibrato $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *a fibra* $\mathbb{C}^n$ *tale che:*

- *su ogni fibra* $p^{-1}(x)$ *c'è una struttura di spazio vettoriale complesso*
- *per ogni* $x \in X$ *esiste una banalizzazione locale* $\phi_x : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$, *che è un isomorfismo lineare tra* $p^{-1}(y)$ *e* $\{y\} \times \mathbb{C}^n$ *per ogni* $y \in U$.

Definizione

Un fibrato vettoriale complesso di rango n è un fibrato $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *a fibra* $\mathbb{C}^n$ *tale che:*

- *su ogni fibra* $p^{-1}(x)$ *c'è una struttura di spazio vettoriale complesso*
- *per ogni* $x \in X$ *esiste una banalizzazione locale* $\phi_x : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$*, che è un isomorfismo lineare tra* $p^{-1}(y)$ *e* $\{y\} \times \mathbb{C}^n$ *per ogni* $y \in U$*.*

Esempi: fibrato banale $X \times \mathbb{C}^n$, fibrato tangente a una varietà differenziabile (nel caso reale), nastro di Moebius “prolungato”.

Esempio: vedendo $\mathbb{P}^1$ come l'insieme delle rette di $\mathbb{C}^2$, definiamo

$$E = \{(v, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 : v \in r\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$
$$p = \pi_{\mathbb{P}^1}.$$

Il fibrato $\gamma_1^1 = E \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$ è detto fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$.
La fibra di γ_1^1 sopra un punto r di $\mathbb{P}^1$ (una retta in $\mathbb{C}^2$) è la retta r stessa.

Esempi: fibrato banale $X \times \mathbb{C}^n$, fibrato tangente a una varietà differenziabile (nel caso reale), nastro di Moebius "prolungato".
Esempio: vedendo $\mathbb{P}^1$ come l'insieme delle rette di $\mathbb{C}^2$, definiamo

$$E = \{(v, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 : v \in r\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$
$$p = \pi_{\mathbb{P}^1}.$$

Il fibrato $\gamma_1^1 = E \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$ è detto fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$.
La fibra di γ_1^1 sopra un punto r di $\mathbb{P}^1$ (una retta in $\mathbb{C}^2$) è la retta r stessa.

Definizione

Un morfismo $f : \xi \to \eta$ *tra due fibrati vettoriali* $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *e* $\eta = F \xrightarrow{q} X$ *su* X *è una funzione continua* $f : E \to F$ *tale che:*

- $q \circ f = p$, *cioè la fibra* $p^{-1}(x)$ *viene mandata in* $q^{-1}(x)$
- f *è lineare ristretta ad ogni fibra di* ξ.

In particolare un morfismo $f : \xi \to \eta$ è un isomorfismo se è un isomorfismo lineare ristretto a ogni fibra; equivalentemente se esiste un morfismo $g : \eta \to \xi$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_E$ e $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Definizione

Un morfismo $f : \xi \to \eta$ *tra due fibrati vettoriali* $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *e* $\eta = F \xrightarrow{q} X$ *su* X *è una funzione continua* $f : E \to F$ *tale che:*

- $q \circ f = p$*, cioè la fibra* $p^{-1}(x)$ *viene mandata in* $q^{-1}(x)$
- f *è lineare ristretta ad ogni fibra di* ξ*.*

In particolare un morfismo $f : \xi \to \eta$ è un isomorfismo se è un isomorfismo lineare ristretto a ogni fibra; equivalentemente se esiste un morfismo $g : \eta \to \xi$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_E$ e $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Pullbacks

$\xi = E \xrightarrow{p} X$ fibrato vettoriale, $f : Y \to X$ continua.
Definiamo un fibrato su Y, costruendolo a partire da ξ:

$$\begin{aligned} E' &= \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = p(e)\} \subseteq Y \times E \\ p' &= \pi_Y : E' \to Y \\ f' &= \pi_E : E' \to E. \end{aligned}$$

$f^*(\xi) = E' \xrightarrow{p'} Y$ è un fibrato vettoriale chiamato pullback di ξ, e f' manda con un isomorfismo la fibra di $f^*(\xi)$ sopra y nella fibra di ξ sopra $f(y)$.
Inoltre $f^*(\xi)$ è l'unico fibrato con queste proprietà, a meno di isomorfismo.

Pullbacks

$\xi = E \xrightarrow{p} X$ fibrato vettoriale, $f : Y \to X$ continua.
Definiamo un fibrato su Y, costruendolo a partire da ξ:

$$
\begin{aligned}
E' &= \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = p(e)\} \subseteq Y \times E \\
p' &= \pi_Y : E' \to Y \\
f' &= \pi_E : E' \to E.
\end{aligned}
$$

$f^*(\xi) = E' \xrightarrow{p'} Y$ è un fibrato vettoriale chiamato pullback di ξ, e f' manda con un isomorfismo la fibra di $f^*(\xi)$ sopra y nella fibra di ξ sopra $f(y)$.
Inoltre $f^*(\xi)$ è l'unico fibrato con queste proprietà, a meno di isomorfismo.

Altre proprietà:

- se $f, g : Y \to X$ sono omotope e Y è paracompatto, allora $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$
- l'associazione
$$X \to \mathrm{Vect}^n(X)$$
$$[f] \to f^*$$
è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi paracompatti con classi di omotopia di funzioni alla categoria degli insiemi
- in particolare un'equivalenza omotopica induce una bigezione tra classi di isomorfismo di fibrati di rango fissato
- se ξ è un fibrato banale, allora è pullback di un fibrato che ha come spazio base un punto di X.

Altre proprietà:

- se $f, g : Y \to X$ sono omotope e Y è paracompatto, allora $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$
- l'associazione

$$X \to \mathrm{Vect}^n(X)$$
$$[f] \to f^*$$

  è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi paracompatti con classi di omotopia di funzioni alla categoria degli insiemi
- in particolare un'equivalenza omotopica induce una bigezione tra classi di isomorfismo di fibrati di rango fissato
- se ξ è un fibrato banale, allora è pullback di un fibrato che ha come spazio base un punto di X.

Altre proprietà:

- se $f, g : Y \to X$ sono omotope e Y è paracompatto, allora $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$
- l'associazione
$$X \to \mathrm{Vect}^n(X)$$
$$[f] \to f^*$$
è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi paracompatti con classi di omotopia di funzioni alla categoria degli insiemi
- in particolare un'equivalenza omotopica induce una bigezione tra classi di isomorfismo di fibrati di rango fissato
- se ξ è un fibrato banale, allora è pullback di un fibrato che ha come spazio base un punto di X.

Altre proprietà:

- se $f, g : Y \to X$ sono omotope e Y è paracompatto, allora $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$
- l'associazione
$$X \to \mathrm{Vect}^n(X)$$
$$[f] \to f^*$$
è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi paracompatti con classi di omotopia di funzioni alla categoria degli insiemi
- in particolare un'equivalenza omotopica induce una bigezione tra classi di isomorfismo di fibrati di rango fissato
- se ξ è un fibrato banale, allora è pullback di un fibrato che ha come spazio base un punto di X.

Altre costruzioni

$\xi = E \xrightarrow{p} X$ ed $\eta = F \xrightarrow{q} X$ fibrati vettoriali su X, poniamo:

$$E' = \coprod_{x \in X} (p^{-1}(x) \oplus q^{-1}(x))$$
$$p'(p^{-1}(x) \oplus q^{-1}(x)) = \{x\}.$$

$\xi \oplus \eta = E' \xrightarrow{p'} X$ è un fibrato vettoriale chiamato somma diretta di ξ ed η.

Molte altre costruzioni dell'algebra lineare, ad esempio il prodotto tensore, si trasportano allo stesso modo sui fibrati vettoriali.

Altre costruzioni

$\xi = E \xrightarrow{p} X$ ed $\eta = F \xrightarrow{q} X$ fibrati vettoriali su X, poniamo:

$$E' = \coprod_{x \in X} (p^{-1}(x) \oplus q^{-1}(x))$$
$$p'(p^{-1}(x) \oplus q^{-1}(x)) = \{x\}.$$

$\xi \oplus \eta = E' \xrightarrow{p'} X$ è un fibrato vettoriale chiamato somma diretta di ξ ed η.

Molte altre costruzioni dell'algebra lineare, ad esempio il prodotto tensore, si trasportano allo stesso modo sui fibrati vettoriali.

Classi caratteristiche

Definizione

Una classe caratteristica c di rango n è una associazione che a ogni fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *assegna una classe di coomologia* $c(\xi) \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$, *che dipende solo dalla classe di isomorfismo di* ξ, *e tale che per un pullback* $f^*(\xi)$ *valga* $c(f^*(\xi)) = f^*(c(\xi))$. *(naturalità)*

Esempio: l'associazione che a ogni fibrato $\xi : E \xrightarrow{p} X$ fa corrispondere l'identità $1 \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$ è una classe caratteristica.

Classi caratteristiche

Definizione

Una classe caratteristica c di rango n è una associazione che a ogni fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{p} X$ *assegna una classe di coomologia* $c(\xi) \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$, *che dipende solo dalla classe di isomorfismo di* ξ, *e tale che per un pullback* $f^*(\xi)$ *valga* $c(f^*(\xi)) = f^*(c(\xi))$. *(naturalità)*

Esempio: l'associazione che a ogni fibrato $\xi : E \xrightarrow{p} X$ fa corrispondere l'identità $1 \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$ è una classe caratteristica.

- Se ξ è un fibrato banale e c una classe caratteristica, si ha $c(\xi) \in \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Z})$. Infatti ξ è pullback di un fibrato con spazio base un punto, e $\mathrm{H}^i(\{x_0\};\mathbb{Z})$ è banale se $i \geq 1$.
- Ponendo
$$(c+d)(\xi) = c(\xi) + d(\xi)$$
$$(cd)(\xi) = c(\xi) \smile c(\xi)$$
si ottiene una struttura di anello sull'insieme delle classi caratteristiche di rango fissato.

- Se ξ è un fibrato banale e c una classe caratteristica, si ha $c(\xi) \in \mathrm{H}^0(X;\mathbb{Z})$. Infatti ξ è pullback di un fibrato con spazio base un punto, e $\mathrm{H}^i(\{x_0\};\mathbb{Z})$ è banale se $i \geq 1$.
- Ponendo

$$(c+d)(\xi) = c(\xi) + d(\xi)$$
$$(cd)(\xi) = c(\xi) \smile c(\xi)$$

si ottiene una struttura di anello sull'insieme delle classi caratteristiche di rango fissato.

Classi di Chern

Le classi di Chern sono particolari classi caratteristiche c_i, che soddisfano anche i seguenti assiomi.

Assioma

- $c_i(\xi) \in \mathrm{H}^{2i}(X; \mathbb{Z})$ *(classi omogenee)*
- $c_0(\xi) = 1$ *e* $c_i(\xi) = 0$ *se* i *è maggiore del rango di* ξ.

Se ξ ha rango n, $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_n(\xi)$ è la classe di Chern totale di ξ.

Assioma

Se ξ *ed* η *sono fibrati su* X, *allora* $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \smile c(\eta)$.

Classi di Chern

Le classi di Chern sono particolari classi caratteristiche c_i, che soddisfano anche i seguenti assiomi.

Assioma

- $c_i(\xi) \in \mathrm{H}^{2i}(X; \mathbb{Z})$ *(classi omogenee)*
- $c_0(\xi) = 1$ *e* $c_i(\xi) = 0$ *se* i *è maggiore del rango di* ξ.

Se ξ ha rango n, $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_n(\xi)$ è la classe di Chern totale di ξ.

Assioma

Se ξ *ed* η *sono fibrati su* X, *allora* $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \smile c(\eta)$.

L'ultimo è un assioma di normalizzazione; scegliamo un generatore $\sigma \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Assioma

La classe di Chern totale del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$ è $c(\gamma_1^1) = 1 + \sigma$.

Teorema

Esistono e sono uniche delle associazioni c_i che soddisfano tutti gli assiomi dati.

L'ultimo è un assioma di normalizzazione; scegliamo un generatore $\sigma \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Assioma

La classe di Chern totale del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$ *è* $c(\gamma_1^1) = 1 + \sigma$.

Teorema

Esistono e sono uniche delle associazioni c_i *che soddisfano tutti gli assiomi dati.*

Grassmaniane

Definiamo insiemisticamente, per $n \geq k$,

$$\mathcal{G}(n,k) = \{H \subseteq \mathbb{C}^n : H \text{ sottospazio di dimensione } k\}.$$

L'insieme $V(n,k)$ delle k-uple ortonormali di vettori di $\mathbb{C}^n$ (Varietà di Stiefel) ha una topologia naturale come sottoinsieme di $S^{2n-1} \times \cdots \times S^{2n-1}$, e c'è una funzione surgettiva $\Phi : V(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$, data da $\Phi(v_1, \ldots, v_k) = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Definizione

La Grassmaniana dei k-piani di $\mathbb{C}^n$ è l'insieme $\mathcal{G}(n,k)$ dotato della topologia quoziente rispetto a Φ.
($A \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ è aperto se e solo se $\Phi^{-1}(A)$ è aperto in $V(n,k)$)

Grassmaniane

Definiamo insiemisticamente, per $n \geq k$,

$$\mathcal{G}(n,k) = \{H \subseteq \mathbb{C}^n : H \text{ sottospazio di dimensione } k\}.$$

L'insieme $V(n,k)$ delle k-uple ortonormali di vettori di $\mathbb{C}^n$ (Varietà di Stiefel) ha una topologia naturale come sottoinsieme di $S^{2n-1} \times \cdots \times S^{2n-1}$, e c'è una funzione surgettiva $\Phi : V(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$, data da $\Phi(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Definizione

La Grassmaniana dei k-piani di $\mathbb{C}^n$ è l'insieme $\mathcal{G}(n,k)$ dotato della topologia quoziente rispetto a Φ.
($A \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ è aperto se e solo se $\Phi^{-1}(A)$ è aperto in $V(n,k)$)

Grassmaniane

Definiamo insiemisticamente, per $n \geq k$,

$$\mathcal{G}(n,k) = \{H \subseteq \mathbb{C}^n : H \text{ sottospazio di dimensione } k\}.$$

L'insieme $V(n,k)$ delle k-uple ortonormali di vettori di $\mathbb{C}^n$ (Varietà di Stiefel) ha una topologia naturale come sottoinsieme di $S^{2n-1} \times \cdots \times S^{2n-1}$, e c'è una funzione surgettiva $\Phi : V(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$, data da $\Phi(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Definizione

La Grassmaniana dei k-piani di $\mathbb{C}^n$ è l'insieme $\mathcal{G}(n,k)$ dotato della topologia quoziente rispetto a Φ.
($A \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ è aperto se e solo se $\Phi^{-1}(A)$ è aperto in $V(n,k)$)

Le inclusioni naturali $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+h}$ date da $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$ inducono inclusioni $\mathcal{G}(n, k) \subseteq \mathcal{G}(n+h, k)$.

Definizione

La Grassmaniana infinita dei k-piani di $\mathbb{C}^\infty$ è l'insieme

$$\mathcal{G}_k = \bigcup_{n \geq k} \mathcal{G}(n, k)$$

con la topologia di limite diretto.
(cioè $A \subseteq \mathcal{G}_k$ è aperto se e solo se $A \cap \mathcal{G}(n, k)$ è aperto in $\mathcal{G}(n, k)$ per ogni $n \geq k$)

Le inclusioni naturali $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+h}$ date da $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$ inducono inclusioni $\mathcal{G}(n,k) \subseteq \mathcal{G}(n+h,k)$.

Definizione

La Grassmaniana infinita dei k-piani di $\mathbb{C}^\infty$ è l'insieme

$$\mathcal{G}_k = \bigcup_{n \geq k} \mathcal{G}(n,k)$$

con la topologia di limite diretto.
(cioè $A \subseteq \mathcal{G}_k$ è aperto se e solo se $A \cap \mathcal{G}(n,k)$ è aperto in $\mathcal{G}(n,k)$ per ogni $n \geq k$)

Fibrato tautologico

Generalizziamo il fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$ a un fibrato su $\mathcal{G}(n,k)$:

$$E_{n,k} = \{(v,H) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{G}(n,k) : v \in H\} \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathcal{G}(n,k)$$
$$p_{n,k} = \pi_{\mathcal{G}(n,k)}$$

Il fibrato $\gamma_n^k = E_{n,k} \xrightarrow{p_{n,k}} \mathcal{G}(n,k)$ è detto fibrato tautologico su $\mathcal{G}(n,k)$. La sua fibra sopra un punto $H \in \mathcal{G}(n,k)$ è lo spazio vettoriale H stesso.
Allo stesso modo si definisce $\gamma^k = E_k \xrightarrow{p_k} \mathcal{G}_k$ sulla Grassmaniana infinita $\mathcal{G}_k$.

Fibrato tautologico

Generalizziamo il fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1$ a un fibrato su $\mathcal{G}(n,k)$:

$$E_{n,k} = \{(v,H) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{G}(n,k) : v \in H\} \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathcal{G}(n,k)$$
$$p_{n,k} = \pi_{\mathcal{G}(n,k)}$$

Il fibrato $\gamma_n^k = E_{n,k} \xrightarrow{p_{n,k}} \mathcal{G}(n,k)$ è detto fibrato tautologico su $\mathcal{G}(n,k)$. La sua fibra sopra un punto $H \in \mathcal{G}(n,k)$ è lo spazio vettoriale H stesso.
Allo stesso modo si definisce $\gamma^k = E_k \xrightarrow{p_k} \mathcal{G}_k$ sulla Grassmaniana infinita $\mathcal{G}_k$.

Il fibrato γ^n è anche detto fibrato universale, perchè vale il seguente risultato.

Teorema

Se $\xi = E \xrightarrow{p} X$ è un fibrato vettoriale di rango n, allora esiste una funzione continua $f : X \to \mathcal{G}_n$ (mappa classificante di ξ) tale che $\xi \cong f^*(\gamma^n)$. Inoltre f è unica a meno di omotopia.

Usando questo fatto si mostra che l'anello delle classi caratteristiche di rango n è isomorfo a $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$:
una classe caratteristica c è completamente determinata da $c(\gamma^n) \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$, perchè $c(\xi) = c(f^*(\gamma^n)) = f^*(c(\gamma^n))$.

Il fibrato γ^n è anche detto fibrato universale, perchè vale il seguente risultato.

Teorema

Se $\xi = E \xrightarrow{p} X$ è un fibrato vettoriale di rango n, allora esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow \mathcal{G}_n$ (mappa classificante di ξ) tale che $\xi \cong f^*(\gamma^n)$. Inoltre f è unica a meno di omotopia.

Usando questo fatto si mostra che l'anello delle classi caratteristiche di rango n è isomorfo a $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$:
una classe caratteristica c è completamente determinata da $c(\gamma^n) \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$, perchè $c(\xi) = c(f^*(\gamma^n)) = f^*(c(\gamma^n))$.

Coomologia della Grassmaniana

Teorema

Si ha $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$, *dove* $c_i = c_i(\gamma^n)$ *sono le classi di Chern del fibrato tautologico* γ^n.

In particolare segue che le classi caratteristiche sono tutte polinomi a coefficienti interi nelle classi di Chern.

Infatti se f è la mappa classificante di ξ, si ha

$$\begin{aligned} c(\xi) &= f^*(c(\gamma^n)) = f^*(p(c_1,\dots,c_n)) = p(f^*(c_1),\dots,f^*(c_n)) \\ &= p(c_1(\xi),\dots,c_n(\xi)). \end{aligned}$$

Coomologia della Grassmaniana

Teorema

Si ha $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, *dove* $c_i = c_i(\gamma^n)$ *sono le classi di Chern del fibrato tautologico* γ^n.

In particolare segue che le classi caratteristiche sono tutte polinomi a coefficienti interi nelle classi di Chern.
Infatti se f è la mappa classificante di ξ, si ha

$$\begin{aligned} c(\xi) &= f^*(c(\gamma^n)) = f^*(p(c_1, \dots, c_n)) = p(f^*(c_1), \dots, f^*(c_n)) \\ &= p(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)). \end{aligned}$$

Sketch della dimostrazione:

- Considerando il fibrato $\xi = \pi_1^*(\gamma^1) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$ su $(\mathbb{P}^\infty)^n$, si dimostra che $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ contiene una sottoalgebra isomorfa a $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.
  (cioè tra le classi $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ non ci sono relazioni algebriche a coefficienti in $\mathbb{Z}$)
- Se f è la mappa classificante di ξ, si mostra che $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})) = f^*(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n])$, e si prova che f^* è iniettiva, utilizzando una certa struttura di CW-complesso su $\mathcal{G}_n$.

Segue dunque la tesi, $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.

Sketch della dimostrazione:

- Considerando il fibrato $\xi = \pi_1^*(\gamma^1) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$ su $(\mathbb{P}^\infty)^n$, si dimostra che $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ contiene una sottoalgebra isomorfa a $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.
(cioè tra le classi $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ non ci sono relazioni algebriche a coefficienti in $\mathbb{Z}$)
- Se f è la mappa classificante di ξ, si mostra che $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})) = f^*(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n])$, e si prova che f^* è iniettiva, utilizzando una certa struttura di CW-complesso su $\mathcal{G}_n$.

Segue dunque la tesi, $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.

Sketch della dimostrazione:

- Considerando il fibrato $\xi = \pi_1^*(\gamma^1) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$ su $(\mathbb{P}^\infty)^n$, si dimostra che $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ contiene una sottoalgebra isomorfa a $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.
  (cioè tra le classi $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ non ci sono relazioni algebriche a coefficienti in $\mathbb{Z}$)
- Se f è la mappa classificante di ξ, si mostra che $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})) = f^*(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n])$, e si prova che f^* è iniettiva, utilizzando una certa struttura di CW-complesso su $\mathcal{G}_n$.

Segue dunque la tesi, $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.

- A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, http://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpage.html
- A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer, 1966.
- J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.

Lemma

$\mathcal{G}_n$ ha una struttura di CW-complesso, in cui le $2i$-celle sono in corrispondenza con le n-uple di naturali $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ tali che $0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ e $i = (\sigma_1 - 1) + \cdots + (\sigma_n - n)$, e non sono presenti celle di dimensione dispari.

Lemma

Se $g : A \to B$ è un omomorfismo surgettivo tra gruppi abeliani di rango finito, e $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(B)$, allora g è iniettivo.

Lemma

$\mathcal{G}_n$ ha una struttura di CW-complesso, in cui le $2i$-celle sono in corrispondenza con le n-uple di naturali $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ tali che $0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ e $i = (\sigma_1 - 1) + \cdots + (\sigma_n - n)$, e non sono presenti celle di dimensione dispari.

Lemma

Se $g : A \to B$ è un omomorfismo surgettivo tra gruppi abeliani di rango finito, e $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(B)$, allora g è iniettivo.

Dimostrazione del teorema:
Consideriamo $\xi = \pi_1^*(\gamma^1) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$ su $(\mathbb{P}^\infty)^n$
(dove $\pi_i : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathbb{P}^\infty$ è la proiezione sulla i-esima coordinata).

$$c(\xi) = \prod_{i=1}^n c(\pi_i^*(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^n \pi_i^*(c(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^n \pi_i^*(1 + c_1(\gamma^1))$$
$$= \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) \in \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cong \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z})$$

Dunque $c_i(\xi)$ è l'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle α_j.

Dimostrazione del teorema:
Consideriamo $\xi = \pi_1^*(\gamma^1) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$ su $(\mathbb{P}^\infty)^n$
(dove $\pi_i : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathbb{P}^\infty$ è la proiezione sulla i-esima coordinata).

$$\begin{aligned} c(\xi) &= \prod_{i=1}^n c(\pi_i^*(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^n \pi_i^*(c(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^n \pi_i^*(1 + c_1(\gamma^1)) \\ &= \prod_{i=1}^n (1+\alpha_i) \in \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cong \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Dunque $c_i(\xi)$ è l'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle α_j.

Dimostrazione del teorema:
Consideriamo $\xi = \pi_1^*(\gamma^1) \oplus \cdots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$ su $(\mathbb{P}^\infty)^n$
(dove $\pi_i : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathbb{P}^\infty$ è la proiezione sulla i-esima coordinata).

$$c(\xi) = \prod_{i=1}^{n} c(\pi_i^*(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i^*(c(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i^*(1 + c_1(\gamma^1))$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i) \in \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cong \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z})$$

Dunque $c_i(\xi)$ è l'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle α_j.

Se $f : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathcal{G}_n$ è una mappa classificante per ξ, per naturalità l'applicazione

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

manda x_i nell'i-esimo polinomio simmetrico elementare; segue che la composizione è iniettiva.

In particolare è iniettiva $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$, la cui immagine è una sottoalgebra di $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ isomorfa a $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.

Se $f : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathcal{G}_n$ è una mappa classificante per ξ, per naturalità l'applicazione

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

manda x_i nell'i-esimo polinomio simmetrico elementare; segue che la composizione è iniettiva.
In particolare è iniettiva $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$, la cui immagine è una sottoalgebra di $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ isomorfa a $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$.

Se $\pi : (\mathbb{P}^\infty)^n \to (\mathbb{P}^\infty)^n$ è una permutazione dei fattori, si ha $f^*(\gamma^n) \cong \pi^*(f^*(\gamma^n))$. Dunque f e $f \circ \pi$ sono omotope, e in particolare si ha $f^* = \pi^* \circ f^*$.

L'immagine di f^* coincide quindi con i polinomi simmetrici nelle α_j.

Visto che $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})) = f^*(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n])$ per concludere basta mostrare che f^* è iniettiva.

Poichè $\mathrm{H}^{2i+1}(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$ è banale per ogni i, basta vedere che f^* è iniettiva da $\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$ a $\mathrm{H}^{2i}((\mathbb{P}^\infty)^n;\mathbb{Z})$.

Se $\pi : (\mathbb{P}^\infty)^n \to (\mathbb{P}^\infty)^n$ è una permutazione dei fattori, si ha $f^*(\gamma^n) \cong \pi^*(f^*(\gamma^n))$. Dunque f e $f \circ \pi$ sono omotope, e in particolare si ha $f^* = \pi^* \circ f^*$.
L'immagine di f^* coincide quindi con i polinomi simmetrici nelle α_j.
Visto che $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})) = f^*(\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n])$ per concludere basta mostrare che f^* è iniettiva.
Poichè $\mathrm{H}^{2i+1}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ è banale per ogni i, basta vedere che f^* è iniettiva da $\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ a $\mathrm{H}^{2i}((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z})$.

Se $\pi : (\mathbb{P}^\infty)^n \to (\mathbb{P}^\infty)^n$ è una permutazione dei fattori, si ha $f^*(\gamma^n) \cong \pi^*(f^*(\gamma^n))$. Dunque f e $f \circ \pi$ sono omotope, e in particolare si ha $f^* = \pi^* \circ f^*$.
L'immagine di f^* coincide quindi con i polinomi simmetrici nelle α_j.
Visto che $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})) = f^*(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n])$ per concludere basta mostrare che f^* è iniettiva.
Poichè $\mathrm{H}^{2i+1}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ è banale per ogni i, basta vedere che f^* è iniettiva da $\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ a $\mathrm{H}^{2i}((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z})$.

Il rango di $f^*(\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}))$ conicide con il numero di monomi $c_1^{r_1}\cdots c_n^{r_n}$ tali che $2i = 2r_1 + \cdots + 2nr_n$. Le n-uple di questa forma sono in bigezione con le partizioni di i in al più n naturali tramite

$$(r_1,\ldots,r_n) \longrightarrow r_n \leq r_n + r_{n-1} \leq \cdots \leq r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1$$

e queste ultime con le n-uple $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ con $0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ e $i = (\sigma_1 - 1) + \cdots + (\sigma_n - n)$, ponendo $\sigma_i = r_n + \cdots + r_{n-i+1} + i$.
Queste n-uple sono in corrispondenza biunivoca con le $2i$-celle di $\mathcal{G}_n$, e il numero di tali celle è una limitazione superiore per il rango di $\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$. In conlusione, per il lemma f^* è iniettiva.

Il rango di $f^*(\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}))$ conicide con il numero di monomi $c_1^{r_1}\cdots c_n^{r_n}$ tali che $2i = 2r_1 + \cdots + 2nr_n$. Le n-uple di questa forma sono in bigezione con le partizioni di i in al più n naturali tramite

$$(r_1,\dots,r_n) \longrightarrow r_n \leq r_n + r_{n-1} \leq \cdots \leq r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1$$

e queste ultime con le n-uple $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ con $0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ e $i = (\sigma_1 - 1) + \cdots + (\sigma_n - n)$, ponendo $\sigma_i = r_n + \cdots + r_{n-i+1} + i$. Queste n-uple sono in corrispondenza biunivoca con le $2i$-celle di $\mathcal{G}_n$, e il numero di tali celle è una limitazione superiore per il rango di $\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$. In conlusione, per il lemma f^* è iniettiva.