CAPITOLO 0

Richiami sugli spazi di Sobolev

1 Notazioni e definizioni di base

Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.1. *Definiamo supporto di u (scriveremo* $\operatorname{supp} u$*) la chiusura (relativa ad* Ω*) dell'insieme* $\{x : x \in \Omega$ *tali che* $u(x) \neq 0\}$.

Sia $k \in \mathbb{N}$. Indicheremo la derivata parziale di ordine $k \geq 1$ con una delle seguenti notazioni

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}} = D^p u = D_1^{p_1} \cdots D_2^{p_n} u,$$

dove $p = (p_1, \cdots, p_n)$ e $k = |p| = p_1 + \cdots + p_n$.

$C^k(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni che sono continue su $\overline{\Omega}$ con le loro derivate fino all'ordine k([1]), ed è uno spazio di Banach con la norma([2])

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|p|=0}^{k} \|D^p u\|_{\infty,\Omega}. \tag{1}$$

$C_0^k(\Omega)$ è il s.s.v. di $C^k(\overline{\Omega})$ delle funzioni che hanno *supporto compatto* in Ω.

$C^\infty(\overline{\Omega})$ è lo spazio vettoriale delle funzioni che sono infinite volte derivabili in $\overline{\Omega}$.

$C_0^\infty(\Omega)$ è s.s.v. di $C^\infty(\overline{\Omega})$ delle funzioni che hanno supporto compatto contenuto in Ω.([3])

Esempio 1.2. *Consideriamo la funzione* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita nel modo seguente:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & se\ |x| \geq 1 \\ \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & se\ |x| < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Si ha che $supp\, \varphi \subset [-1, 1]$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, ma φ non è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di $x = 1$ e $x = -1$.

$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è lo spazio vettoriale delle funzioni tale che

$$[u]_{\alpha,\overline{\Omega}} = \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty$$

u appartiene a $C^{0,\alpha}(\Omega)$ se u appartiene a $C^{0,\alpha}(K)$, per ogni compatto $K \subset \Omega$. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è uno spazio di Banach con la norma

[1] $D^p u$ è continua in $\overline{\Omega}$, significa che esiste $D^p u$ in Ω e $D^p u \in C^0(\Omega)$, ed inoltre esiste $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ tale che $\varphi = D^p u$ in Ω.

[2] $\|u\|_{\infty,\overline{\Omega}} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$

[3] Questo spazio è diverso dal vuoto perché contiene la funzione nulla. Inoltre l'unica funzione analitica contenuta in esso proprio la funzione nulla. Infatti una funzione analitica che si annulla fuori da un compatto di Ω è identicamente nulla su Ω.

$$\|u\|_{0,\alpha,\overline{\Omega}} \;=\; \|u\|_{\infty,\overline{\Omega}} \;+\; [u]_{\alpha,\overline{\Omega}} \tag{3}$$

Se Ω è limitato, questa norma è equivalente alla seguente ([4])

$$|||u|||_{0,\alpha,\overline{\Omega}} \;=\; \|u\|_{L^q(\Omega)} + [u]_{\alpha,\overline{\Omega}}. \tag{4}$$

Infatti, per ogni $x, y \in \overline{\Omega}$, abbiamo([5])

$$|u(x)| \leq |u(x) \,-\, u(y)| \,+\, |u(y)| \;\leq\; d_\Omega\, [u]_{0,\alpha,\overline{\Omega}} \,+\, |u(y)|.$$

Integrando rispetto a y su Ω

$$\|u\|_{\infty,\overline{\Omega}} \;\leq\; d_\Omega^\alpha [u]_{\alpha,\overline{\Omega}} + \frac{1}{mis\,\Omega} \int_\Omega |u(y)|dy.$$

Da questa la tesi applicando la diseguaglianza di Hölder.

2 Definizione e richiami delle principali proprietà degli spazi di Sobolev

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dalla formula di integrazione per parti, utilizzando le formule di Gauss-Green, si ottiene per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \varphi(x)\, dx \;=\; -\int_\Omega u(x)\, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{5}$$

Questa relazione caratterizza $\dfrac{\partial u}{\partial\, x_i}$ nel senso che se esistesse un'altra funzione $v_i \in C^0(\overline{\Omega})$ tale che, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, verificasse

$$\int_\Omega v_i\, \varphi(x)\, dx \;=\; -\int_\Omega u(x)\, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{6}$$

allora v_i coinciderebbe con $\dfrac{\partial u}{\partial\, x_i}$. Infatti da (5) e (6), per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, segue

$$\int_\Omega \left(v_i \,-\, \frac{\partial\, u}{\partial x_i} \right) \varphi(x)\, dx \;=\; 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{7}$$

Essendo $\dfrac{\partial u}{\partial\, x_i} \,-\, v_i \,\in C^0\overline{\Omega}$ si ha che

$$\frac{\partial u}{\partial\, x_i} \,-\, v_i \;= 0, \text{ in } \Omega. \tag{8}$$

Questo è una conseguenza del fatto che in ogni aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ possiamo determinare una funzione $C_0^\infty(\Omega)$ non identicamente nulla procedendo nel modo che segue. Sia $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da([6])

---

[4] $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$ è lo s. v. delle funzioni misurabili su Ω tali che $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \;<\; +\infty$, ed è uno spazio di Banach con la norma $\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$.

[5] Se Ω è limitato indichiamo con d_Ω il suo diametro, ovvero $d_\Omega = \sup\{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n},\; x, y \in \Omega\}$.

[6] Indichiamo con $\|x\|_n$ la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$ quando non c'è pericolo di confusione.

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\|_n \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-\|x\|_n^2}} & \text{se } \|x\|_n < 1. \end{cases} \tag{9}$$

È evidente che $supp\,\psi \subset B(0,1)$([7]) e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, quindi $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Posto $\psi_\lambda(x) = \psi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$, con $\lambda > 0$, risulta $\psi_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp\,\psi_\lambda \subset B(0,\lambda)$. Preso x_0 appartenente ad Ω, sia $\lambda > 0$ tale che $B(x_0,\lambda) \subset \Omega$. Poniamo

$$g(x) \;=\; \psi_\lambda(x - x_0) \;=\; \psi_\lambda\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right).$$

Osserviamo che essendo $supp\,g \subset \overline{B(x_0,\lambda)} \subset \Omega$ allora $g \in C_0^\infty(\Omega)$. Se non si verificasse (8) allora esisterebbe un $x_0 \in \Omega$ tale che, ad esempio

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial\, x_i} \;-\; v_i(x_0) \;> 0, \tag{10}$$

per cui si avrebbe

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\, x_i} \;-\; v_i(x) \;> 0, \tag{11}$$

per ogni x appartenente ad un intorno $U(x_0) \subset \Omega$ di x_0. Consideriamo la funzione g vista sopra che abbia il supporto contenuto in $U(x_0)$ ed $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in U(x_0)$ si abbia

$$0 \leq \varepsilon\, g(x) \;<\; \frac{\partial u(x)}{\partial\, x_i} \;-\; v_i(x).$$

In questo caso arriviamo ad un assurdo perchè

$$0 \;<\; \varepsilon \int_\Omega g(x)\, g(x)\, dx \;<\; \int_\Omega \left[\frac{\partial u(x)}{\partial\, x_i} \;-\; v_i(x)\right] g(x)\, dx \;=\; 0$$

In generale se $u \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, allora per ogni $p \in \mathbb{N}^n$, con $|p| \leq k$, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega D^p u(x)\; \varphi(x)\; dx \;\;=\;\; (-1)^p \int_\Omega u(x)\; D^p\, \varphi(x)\; dx, \tag{12}$$

Anche in questo caso (12) caratterizza $D^p u$ su Ω e quindi ci consente di dare una generalizzazione della definizione della derivata $D^p u$, per questo premettiamo la seguente definizione

Definizione 2.1. *Diremo che u è* localmente sommabile *in Ω (scriveremo $u \in L^1_{loc}(\Omega)$) se u è sommabile su ogni compatto K contenuto in Ω.*

In particolare se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $u\,\varphi$ è sommabile in Ω e

$$\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\; dx \;=\; \int_{supp\,\varphi} u(x)\,\varphi(x)\; dx.$$

Definizione 2.2. *Siano $p \in \mathbb{N}^n$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremo che una funzione $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ è la* **derivata in senso debole** *$D^p u$, e scriviamo $v = D^p u$, se, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, vale*

$$\int_\Omega v(x)\; \varphi(x)\; dx \;\;=\;\; (-1)^p \int_\Omega u(x)\; D^p\, \varphi(x)\; dx, \tag{13}$$

[7]Indichiamo con $B(x_0, r)$ la palla aperta di centro x_0 e raggio r.

Osservazione 2.3. *Se u ha la derivata $D^p u$ in senso classico, continua su $\overline{\Omega}$, allora questa coincide con la derivata debole.*
La relazione (13) determina in maniera univoca la drivata $D^p u$. La dimostrazione di questo asserto non è ovvia e si basa sulla proposizione seguente.

Proposizione 2.4. *Sia $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ verifichi*

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\ dx\ =\ 0, \tag{14}$$

allora $v = 0$ q.o. in Ω.

Per la dimostrazione si possono usare le "regolarizzanti di Friedrich" (Friedrich mollifiers).

Osservazione 2.5. *La derivata $D^p u$ può esistere anche se non esistono le derivate di ordine minore (stretto) di $|p|$ come si vede dall'esempio seguente.*

Esempio 2.6.

Sia $u(x,y) = u_1(x) + u_2(y)$, dove $u_1(x) = sgn\,x$, $u_2(y) = sgn\,y$, $\Omega = \{(x,y) : |x| < 1, |y| < 1\} = \Omega_- \cup \Omega_+$, dove $\Omega_- = \mathbb{R}^- \cap \Omega$, $\Omega_+ = \mathbb{R}^+ \cap \Omega$.
È evidente che:

(a) u non ha le derivate D_1 e D_2 su Ω;

(b) esistono le derivate $D_{12}u$ e $D_{21}u$ su Ω e valgono 0;

Verifica di (a): se esistesse v tale che $D_1 u = v$ allora, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, si avrebbe

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x,y)\ dx\,dy\ =\ -\int_\Omega (sgn\,x\ +\ sgn\,y)\,D_1\varphi(x,y)\ dx\,dy\ =$$

$$=\int_{\Omega_-} D_1\varphi(x,y)\,dx\,dy\ -\int_{\Omega_+} D_1\varphi(x,y)\,dx\,dy\ =\ 2\int_{-1}^{1}\varphi(0,y)\ dy.$$

Verifica di (b):

$$\int_\Omega u(x)\,D_{12}\varphi(x,y)\ dx\,dy\ =\ -\int_\Omega (sgn\,x\ +\ sgn\,y)\,D_{12}\varphi(x,y)\ dx\,dy.$$

Ma

$$\int_\Omega sgn\,x\,D_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy\ =\int_{\Omega_-} D_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy\ -\int_{\Omega_+} D_{12}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy\ =$$

$$2\int_{-1}^{1} D_2\varphi(0,y)\ dy\ =\ 0.$$

Stesso discorso per $sgn\,y$.

Poniamo

$$W^{k,q}(\Omega) = \{u \in L^q(\Omega) : \text{esiste } D^\alpha u \text{ in senso debole e } D^\alpha \in L^q(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \text{con } |\alpha| < k\},$$

dove $k \in \mathbb{N}$ e $q \geq 1$.
Si dimostra che

(1) $W^{k,q}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

(2) $W^{k,q}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{k,q,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^q_{L^q(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{15}$$

Mentre

$$|u|_{j,q,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|^q_{L^q(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

è una seminorma se $j > 0$, in particolare $\|u\|_{0,q,\Omega} = \|u\|_{L^q(\Omega)}$ e $\|u\|_{k,\infty,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

(3) Se $q = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(u,v)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u(x)\ D^\alpha v(x)\ dx. \tag{16}$$

(4) Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ed esistono le derivate deboli $D^\alpha u = v$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta v = w$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ allora esiste la derivata debole $D^{\alpha+\beta} u$ e $D^{\alpha+\beta} u = w$.

(5) Se u ha la derivata debole $D^\alpha u$ in Ω e $u =$ *costante* q.o. in $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\tilde{\Omega}$, allora $D^\alpha u = 0$ q.o. in $\tilde{\Omega}$([8]).

(6) La derivata debole non dipende dall'ordine di derivazione.

(7) $W^{k,q}(\Omega)$ è separabile se $1 \le q < +\infty$.

(8) Se $\psi \in C^k(\overline{\Omega})$ e $u \in W^{k,q}(\Omega)$ allora $\psi\, u \in W^{k,q}(\Omega)$

(9) $W^{k,q}(\Omega)$ è uniformemente convesso([9]) se $1 < q < +\infty$.

(10) $W^{k,q}(\Omega)$ è riflessivo([10]) se $1 < q < +\infty$.

Ques'ultima proprietà risulta molto utile nelle applicazioni in quanto vale il seguente teorema

Teorema 2.7. *Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se la palla $\overline{B(0,r)} = \{x \in X : \|x\|_X \le r\}$ è debolemente compatta per succesioni.*

Ricordiamo le seguenti definizioni.

Definizione 2.8. *Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ e $u \in L^q(\Omega)$, $q \ge 1$.*

(i) Diremo che u_n tende a u **forte in** $L^q(\Omega)$ *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^q(\Omega)} = 0$$

(ii) Diremo che u_n tende a u **debole in** $L^1(\Omega)$ *se per ogni ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\omega u_n(x)\,\varphi(x)\ dx = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\ dx.$$

[8]Segue dalla definizione e dalla Proposizione 2.4. Vale anche il viceversa: sia Ω connesso, se per ogni α tale che $|\alpha| = 1$ risulta $D^\alpha u = 0$ q.o. in Ω allora $u =$ *costante* q.o. in Ω.

[9]Uno spazio vettoriale normato X si dice *uniformemente convesso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x - y\|_X \ge \varepsilon$ si ha $\|x + y\|_X \le 2(1-\delta)$.

[10]Uno spazio vettoriale normato X si dice *riflessivo* se per ogni $y \in X^{**}$ esiste $x(y) \in X$ tale che per ogni $z \in X^*$ si abbia $< y, z >=< z, x(y) >$ e $\|y\|_{X^{**}} = \|x(y)\|_X$. L'asserto segue dal Teorema di Milman: *Uno spazio di Banach uniformememnte convesso è riflessivo.*

Si verifica facilmente che se u_n tende ad u **forte** allora u_n tende ad u **debole**.

Osservazione 2.9.
$$C^k(\overline{\Omega}) \subsetneq W^{k,q}(\Omega), \quad \forall q \geq 1.$$

si consideri infatti $\Omega = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ e $u(x) = |x|$. Si vede facilmente che $u \in W^{1,q}(\Omega)$, per ogni $q \geq 1$, mentre u non appartiene a $C^1(\overline{\Omega})$, in quanto $D(|x|) = sgn\, x$ in senso debole su Ω.

Osservazione 2.10. $C^k(\overline{\Omega})$ **non è un sottoinsieme chiuso** *di* $W^{k,q}(\Omega)$.

Infatti si consideri in $\Omega = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ la successione di funzioni definite come segue

$$u_n(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq -\dfrac{2}{n+1}, \\[2mm] \dfrac{n+1}{4}\, x^2 + \dfrac{1}{n+1}, & -\dfrac{2}{n+1} < x < \dfrac{2}{n+1}, \\[2mm] x, & \dfrac{2}{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

È evidente che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ ed inoltre u_n tende ad u nella norma di $W^{1,2}(\Omega)$. Ma come si è visto sopra $|x| \in W^{1,2}(\Omega)$ ma non appartiene a $C^1(\overline{\Omega})$.

Definizione 2.11. *Definiamo* $H^{k,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, *la* **chiusura** *di* $C^k(\overline{\Omega})$ *in* $W^{k,q}(\Omega)$.

$H^{k,q}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma (15), ed è uno spazio di Hilbert se $q = 2$. Valgono le inclusioni
$$C^k(\overline{\Omega}) \subset H^{k,q}(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega).$$

Come si è visto nell'Osservazione 6 la prima inclusione è stretta. Anche la seconda è stretta come si vede dal seguente esempio.

Esempio 2.12.

Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 < |x| < 1,\, |y| < 1\}$ e $u(x,y) = sgn\, x$.
È evidente che

(i) $u \in C^\infty(\Omega)$

(ii)$u \notin C^0(\overline{\Omega})$

(iii) $W^{1,q}(\Omega)$ e $D_1 u = D_2 u = 0$ in Ω.

Mentre u non appartiene a $H^{1,q}(\Omega)$, $q \geq 1$, perché altrimenti esisterebbe una successione di funzioni u_n appartenenti a $C^1(\overline{\Omega})$ tale che u_n tende a u in $W^{1,q}(\Omega)$. Considerando il prolungamento $\overline{u}$ di u a
$$\tilde{\Omega} = \Omega \cup \{(x,y) :\, x = 0,\, |y| < 1\}.$$

Si vede facilmente che $\overline{u} \notin W^{1,q}(\tilde{\Omega})$, mentre dal fatto che u_n tende a u in $W^{1,q}(\Omega)$ segue che u_n tende a $\overline{u}$ in $W^{1,q}(\tilde{\Omega})$. Poiché u_n appartiene a $C^1(\overline{\Omega})$ che è contenuto in $W^{1,q}(\tilde{\Omega})$, per la completezza di questo spazio si avrebbe $\overline{u} \in W^{1,q}(\tilde{\Omega})$.

Definizione 2.13. *Indichiamo con* $H_0^{k,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, *la chiusura di* $C_0^k(\Omega)$ *in* $W^{k,q}(\Omega)$.

Con la norma (15), $H_0^{k,q}(\Omega)$ è uno spazio di Banach, che è di Hilbert se $q = 2$. Valgono le seguenti inclusioni:
$$C_0^k(\Omega) \subset H_0^{k,q}(\Omega) \subset H^{k,q}(\Omega),$$

perché $C_0^k(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$. In particolare, per la densità di $C_0^0(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$, se $1 \leq q < +\infty$, segue che, se $k = 0$, $H_0^{0,q}(\Omega) = H^{0,q}(\Omega) = W^{0,q}(\Omega)$.

Definizione 2.14. *Diremo che la funzione u appartenente a* $L^q(\Omega)$ *è* **derivabile in senso forte** *su* Ω, *oppure che u ha le* **derivate in senso forte** *su* Ω, *fino all'ordine k se esiste una successione* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contenuta in* $C^k(\overline{\Omega})$ *tale che* $D^p u_n$ *tende a* $D^p u$ *in* $L^q(\Omega)$, *per ogni* $p \in \mathbb{N}^n$ *con* $|p| \leq k$.

Dalle definizioni date segue che $H^{k,q}(\Omega)$ (ed anche $H_0^{k,q}(\Omega)$) è lo spazio delle funzioni che hanno le *derivate forti* in Ω fino all'ordine k.
In particolare, si dimostra facilmente che se u **è derivabile in senso forte** su Ω allora **è derivabile in senso debole** su Ω.

Definizione 2.15. *Diremo che* Ω *ha la* **proprietà del segmento** *se esiste un ricoprimento* $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, *localmente finito, di* $\partial\Omega$ *ed una successione di vettori non nulli* $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *tali che se* $z \in \overline{\Omega} \cap U_j$, *per qualche j, allora* $z + ty_j \in \Omega$, *per* $t \in (0,1)$.

L'aperto $\Omega = \{(x,y): \ 0 < |x| < 1, \ |y| < 1\}$ non ha la proprietà del segmento.

Teorema 2.16. *Se* Ω *ha la proprietà del segmento allora*

$$H^{k,q}(\Omega) = W^{k,q}(\Omega), \ \text{per ogni } 1 \leq q < +\infty.$$

3 Teoremi di immersione di Sobolev e Rellich

Definizione 3.1. *Un aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *ha la* **proprietà del cono** *se esite un cono finito* C_0 *tale che ogni* $x \in \Omega$ *è vertice di un cono finito* $C_x \subset \Omega$(11) *e congruo a* C_0.

Definizione 3.2. *Il bordo* $\partial\Omega$ *di un aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *si dice continuo (oppure* $C^{0,1}, C^1, \cdots, C^k$*) se per ogni* $x \in \partial\Omega$ *esite* $U(x)$ *ed un nuovo sistema di coordinate cartesiane ortogonali* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *tali che U è un ipercubo nel nuovo sistema di assi:*

$$U = \{(y_1, \cdots, y_n): -a_j < y_j < a_j, \, 1 \leq j \leq n, \, a_j > 0\},$$

ed esiste $\varphi \in C^0(V')$ *(oppure appartiene a* $C^{0,1}(V')$, $C^1(V')$, $C^k(V')$*), con*

$$U' = \{y' = (y_1, \cdots, y_{n-1}): \ -a_j < y_j < a_j, \, 1 \leq j \leq n-1, \, a_j > 0\}$$

per cui valga

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2}, \ \forall y' \in U'$$

$$\Omega \cap U \ = \ \{(y', y_n) \in U: \ y_n < \varphi(y')\}$$

$$\partial\Omega \cap U = \{(y', y_n) \in U: \ y_n = \varphi(y')\}.$$

Si dimostra che

Teorema 3.3. *Un aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *ha la proprietà del cono se e solo se* $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Teorema 3.4. *(***Teoremi di immersione di Sobolev***)*
Sia Ω *aperto di* $\mathbb{R}^n$ *con la proprietà del cono (se* $n \geq 2$*). Valgono le seguenti immersioni.*

(1) Se $1 \leq p < \dfrac{n}{m}$ *allora* $H^{m,p}(\Omega) \subset L^{p_m^*}(\Omega)$, *con* $\dfrac{1}{p_m^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$, *e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{L^{p_m^*}(\Omega)} \ \leq \ c_1 \sum_{j=0}^{m} d_\Omega^{j-m} \, |u|_{j,p,\Omega}. \tag{17}$$

[11] Dati $x \in \mathbb{R}^n$, una sfera aperta $B_1(x,r)$ di centro x e raggio r, e una sfera aperta B_2 che non contiene x, definiamo $C_x = B_1(x,r_1) \cap \{x + \lambda(y-x): \ y \in B_2, \, \lambda > 0\}$ **cono finito di** $\mathbb{R}^n$ **con vertice in** x **e altezza** r_1. C_0 è il cono con centro 0.

(2) Se $p > \dfrac{n}{m}$ *allora* $H^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, *e vale la maggiorazione*

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| \;\leq\; c_2 \sum_{j=0}^{m} d_{\Omega}^{\,j-\frac{n}{p}}\, |u|_{j,p,\Omega}. \tag{18}$$

(3) Se $p > n$ *allora* $H^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *con* $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$, *e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \;\leq\; c_3\, \|u\|_{1,p,\Omega}. \tag{19}$$

(4) Se $p = \dfrac{n}{m}$, *poiché* $H^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p-\varepsilon}(\Omega)$, *per ogni* $\varepsilon \in [0, p-1]$, *allora* $u \in L^q(\Omega)$, *per ogni* $q \in [1, +\infty)$, *e vale la maggiorazione*

$$\|u(x)\|_{L^q(\Omega)} \;\leq\; c_4 \sum_{j=0}^{m} d_{\Omega}^{\,\frac{n}{q}+j-m}\, |u|_{j,p,\Omega}. \tag{20}$$

Teorema 3.5. *(***Teorema di Rellich***)*
Sia Ω *aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *con la proprietà del cono. L'immersione di* $H^{1,q}(\Omega)$ *in* $L^q(\Omega)$ *è compatta se* $1 \leq q < \dfrac{np}{n-np}$.

Teorema 3.6. *Sia* Ω *è aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *con la proprietà del cono. La norma* $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$, *con* $m > 1$, *è equivalente alla seguente*

$$|||u|||_{m,p,\Omega} \;=\; \|u\|_{L^p(\Omega)} + |u|_{m,p,\Omega}. \tag{21}$$

Questo teorema è una conseguenza del seguente

Teorema 3.7. *Se* $0 \leq h < k < m$ *allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $c(\varepsilon > 0)$ *tale che, per ogni* $u \in H^{m,p}(\Omega)$, *si abbia*

$$\|u\|_{k,p,\Omega} \;=\; \varepsilon\, \|u\|_{m,p,(\Omega)} \;+\; c(\varepsilon)\, \|u\|_{h,p,\Omega}. \tag{22}$$

La dimostrazione utilizza il Teorema di Rellich ed il seguente Lemma di Peetre.

Lemma 3.8. *Siano* X, Y, Z *tre spazi di Banach tali che*

(a) $X \subset Y \subset Z$,

(b) $i : X \longrightarrow Y$ *è compatta,* $j : Y \longrightarrow Z$ *è continua,*

allora per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $c(\varepsilon) > 0$ *tale che, per ogni* $u \in X$, *valga la maggiorazione*

$$\|u\|_Y \;\leq\; \varepsilon\, \|u\|_X \;+\; c(\varepsilon)\, \|u\|_Z. \tag{23}$$

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni c_n (con $c_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) esiste $u_n \in X$ per i quali valga la diseguaglianza

$$\|u_n\|_Y \;\geq\; \varepsilon\, \|u_n\|_X \;+\; c_n\, \|u_n\|_Z. \tag{24}$$

Posto $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_X}$ si ha

$$\|v_n\|_Y \ \geq \ \varepsilon \ + \ c_n \, \|v_n\|_Z. \tag{25}$$

Ma $\|v_n\|_Y \leq C\|v_n\|_X \ = \ C$, quindi

$$\|v_n\|_Z \ = \ \frac{C}{c_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{26}$$

Essendo $\|v_n\|_X \ = \ 1$, per la compattezza dell'immersione di X in Y possiamo trovare una sottosuccessione $\{v_{n_h}\}_{n_h \in \mathbb{N}}$ che converge fortemente in Y e per (26) risulta $\|v_{n_h}\|_Y \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Questo è in contraddizione con (25). □

Anche per gli spazi delle funzioni hölderiane valgono analoghe maggiorazioni. Infatti come conseguenza del teorema di Ascoli-Arzelà, l'immersione di $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ in $C^m(\overline{\Omega})$ è compatta e vale la seguente maggiorazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon) > 0$ tale, che per ogni $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, si abbia

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \ \leq \ \varepsilon \, \|u\|_{C^{m,\alpha}}(\overline{\Omega}) \ + \ c(\varepsilon) \, \|u\|_{C^h(\overline{\Omega})}, \tag{27}$$

dove $0 \leq h < m$, $\alpha \in (0,1]$. Quindi in $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ possiamo prendere anche la norma seguente, che è equivalente a quella canonica

$$|||u|||_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} \ = \ \sum_{|\beta|=m} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \ + \ \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}. \tag{28}$$

Se Ω è limitato, possiamo prendere anche la norma

$$|||u|||_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} \ = \ \sum_{|\beta|=m} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \ + \ \|u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{29}$$

con $p \geq 1$.

Teorema 3.9. *(***Maggiorazione di Poincaré***)*
Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Per ogni funzione $u \in H_0^{m,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$, $0 \leq j \leq m$, vale la maggiorazione

$$|u|_{j,p,\Omega} \leq d_\Omega^{m-j} \, |u|_{m,p,\Omega}. \tag{30}$$

Nel caso $m = 1$, si ha

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \ \leq \ c d_\Omega \, |u|_{1,p,\Omega} \tag{31}$$

Come conseguenza di questa maggiorazione e dei Teoremi 3.6 e 3.7 in $H_0^{m,p}(\Omega)$ possimo prendere com norma $|\cdot|_{m,p,\Omega}$.

La maggiorazione di Poincaré è falsa in $H^{m,p}(\Omega)$. Basta prendere su $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$ la funzione $u(x) = 1$, per ogni $x \in [0,1]$. Si ha che $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $\|u'\|_{L^p(\Omega)} = 0$.

4 Spazi vettoriali topologici.

In questa parte richiamiamo in breve la definizione ed alcune proprietà degli spazi vettoriali topologici che useremo nel seguito.
Sia X uno spazio vettoriali e τ una topologia su X.

Definizione 4.1. *τ è una topologia vettoriale su X, oppure X è uno* **spazio vettoriale topologico** *se le applicazioni*

$$(x,y) \longrightarrow x+y \quad \text{ e } \quad (\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$$

di $X \times X$ in X e $\mathbb{C} \times X$ in X sono continue quando X è munito della topologia τ (e $\mathbb{C}$ di quella euclidea).

Si dimostra che per ogni a appartenente a X e per ogni α appartenente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'operatore traslazione T_a definito da $T_a(x) = a + x$ e l'operatore omotetia definito da $M_\alpha = \alpha x$, $\forall x \in X$, sono omeomorfismi di X in X.
Come conseguenza si ha che ogni topologia vettoriale τ è invariante per traslazioni e per omotetie. Ovvero un insieme E di X è aperto se e solo se $a + E$ è aperto (oppure αE è aperto).
Quindi, per ogni $x \in X$, un sistema fondamentale di intorni $\mathcal{I}(x)$ di x nella topologia vettoriale τ è individuato dal sistema fondamentale di intorni $\mathcal{I}(0)$ di 0 mediante la traslazione $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(0) + x$.
Un sistema fondamentale di intorni nella topologia vettoriale τ può essere individuato definendo una famiglia di *seminorme* su X.

Definizione 4.2. *Una seminorma su di uno spazio vettoriale X è una funzione $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con le proprietà:*

$$\begin{aligned} &i) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X \\ &ii) \quad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x \in X. \end{aligned} \tag{32}$$

Si osservi per ogni $x \in X$ risulta $p(x) \geq 0$ in quanto da i) segue $0 \leq p(x - x) \leq p(x) + p(x) = 2p(x)$. È facile dimostrare che se p è una seminorma su X allora

(a) $p(0) = 0$ (p è una norma se per ogni $x \neq 0$ allora $p(x) \neq 0$);

(b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$;

(c) $p(x) \geq 0$;

(d) $\{x : \ p(x) = 0\}$ è un sottospazio di X;

(e) $\{x : \ p(x) < 1\}$ è un insieme convesso.

Una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è detta *separante* se per ogni $x \neq 0$ esite almeno un $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.
Si dimostra che se $\mathcal{P}$ è una famiglia separante di seminorme sullo spazio vettoriale X allora posto

$$V(p, n) = \left\{ x : \ p(x) < \frac{1}{n} \right\}, \ \ p \in \mathcal{P}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

e $\mathcal{B}$ l'insieme delle intersezioni finite dei $V(p, n)$ si ha che $\mathcal{B}$ è una base locale per una topologia τ su X. Inoltre X è uno spazio vettoriale topologico con la topologia τ, e, per ogni $p \in \mathcal{P}$, p è continua su (X, τ), mentre un insieme $E \subset X$ è limitato([12]) se e solo se ogni $p \in \mathcal{P}$ è limitata su E.

Teorema 4.3. *Sia X uno spazio vettoriale topologico con la topologia τ individuata da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare. Allora f è continua se e solo se esistono una costante $c > 0$ ed $h-$seminorme $p_1, \cdots, p_h \in \mathcal{P}$ tali che, per ogni $x \in X$ si abbia*

$$|f(x)| \ \leq \ c \sup_{1 \leq i \leq h} p_i(x). \tag{33}$$

Esempio 4.4. *Sia Ω un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una famiglia numerabile di compatti $\{K_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tale che $\cup_{h=1}^{\infty} K_h = \Omega$, per ogni $h \in \mathbb{N}$ risulta $K_h \neq \emptyset$ e $K_h \subset \overset{\circ}{K}_{h+1}$. Su $C^0(\Omega)$ possiamo individuare una topologia vettoriale mediante la seguente famigllia separante di seminorme:*

$$p_n(f) = \|f\|_{\infty, K_n}, \ \ f \in C^0(\Omega).$$

[12] E si dice limitato se per ogni $U \in \mathcal{I}(0)$ esite $\sigma > 0$ tale che $|h| < \sigma \Longrightarrow hE \subset U$.

5 Brevi richiami della teoria delle distribuzioni.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con:

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega).$$

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \ supp\,\varphi \subset K\}, \quad \text{dove } K \text{ è un compatto di } \mathbb{R}^n.$$

Fissato il compatto $K \subset \Omega$, definiamo su $\mathcal{D}_K(\Omega)$ una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$ nel modo che segue: $p_j \in \mathcal{P}$ se e solo se $p_j(\varphi) = \sup\limits_{\substack{x\in\Omega \\ |\alpha|\le j}} |D^\alpha \varphi| = \sup\limits_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\le j}} |D^\alpha \varphi|$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
In questo modo otteniamo su $\mathcal{D}_K(\Omega)$ una topologia vettoriale τ.

Definizione 5.1. *Una* **distribuzione** *T su Ω è un'applicazione lineare $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che la sua restrizone a $\mathcal{D}_K(\Omega)$, per ogni compatto $K \subset \Omega$, sia continua.*

Scriveremo anche $< T, \varphi >$ invece di $T(\varphi)$.
Indicheremo con $\mathcal{D}'(\Omega)$ il duale di $\mathcal{D}(\Omega)$. Dalla definizione di distribuzione segue che $T(\varphi_n) =< T, \varphi_n >\longrightarrow 0$ quando $\varphi_n \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni compatto K contenuto in Ω.
Un altro modo, equivalente a quello dato, per definire una distribuzione è il seguente.

Definizione 5.2. *T è una distribuzione se e solo se*

(1) $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare;

(2) $< T, \varphi_n >\longrightarrow 0$, per ogni $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 0$ nel senso che esiste un compatto K contenuto in Ω per cui si abbia: $supp\,\varphi_n \subset K$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} D^\alpha\varphi_n = 0$ nella norma $\|\cdot\|_{\infty,K}$, per ogni α.

Dal Teorema 33 si ottiene la seguente caratterizzazione delle distribuzioni.

Teorema 5.3. *$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, lineare, è una distribuzione se e solo se per ogni compatto K contenuto in Ω esiste una costante positiva $c(K)$ ed un $j \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ risulti*

$$| < T, \varphi > | \le c(k) \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\alpha|\le j}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Esempio 5.4. *Consideriamo l'applicazione $f \longrightarrow T_f$ definita da:*

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x) dx, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

dove $f \in L^1(\Omega)$. Si verifica facilmente che T_f è una distribuzione. Possiamo scrivere

$$< T_f, \varphi >=< f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\,\varphi(x) \;\, dx, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quindi le funzioni di $L^1(\Omega)$ sono distribuzioni, in particolare anche $W^{k,q}$ e $H^{k,q}$ sono sottospazi di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Consideriamo l'applicazione:

$$| < S_\alpha, \varphi > | = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}^n$ è fissato. Questa è umn'applicazione lineare e continua su $\mathcal{D}(\Omega)$. Infatti per quanto visto sopra esistono $c_k > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tali che

$$| < S_\alpha, \varphi > | = | < T, D^\alpha \varphi > | \le c(k) \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\beta|\le j}} |D^{\alpha+\beta} \varphi(x)|, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Allora $S_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Quindi ha senso la seguente definizione.

Definizione 5.5. *(Derivata di una distribuzione)*
Data la distribuzione T, la derivata $D^\alpha T$ la seguente distribuzione S_α

$$< D^\alpha T, \varphi > = < S_\alpha, \varphi > = \ (-1)^{|\alpha|} \ < T, D^\alpha \varphi >, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Dalla definizione seguono le seguenti proposizioni:

(i) una distribuzione è infinite volte derivabile;

(ii) si può invertire l'ordine di derivazione di una distribuzione;

(iii) la derivata di una distribuzione è una distribuzione.

Osservazione 5.6. *Sia $f \in W^{k,1}(\Omega)$, quindi $D^\alpha f \in L^1(\Omega)$ (derivata in senso debole) per $|\alpha| \leq k$. Alla funzione $D^\alpha f$ resta associata una distribuzione $v \in L^1\Omega$. Infatti per quanto visto nell'esempio 5.4, il fatto che $v = D^\alpha f$ in senso debole implica che $v = D^\alpha f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, perché:*

$$\int_\Omega v(x) \, \varphi(x) \ dx \ = \ (-1)^\alpha \int_\Omega f(x) \ D^\alpha \varphi(x) \ dx, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ossia se associamo a v e ad f una distribuzione:

$$< v, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha \varphi >, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Cioè la derivata debole è proprio la derivata nel senso delle distribuzioni per quelle funzioni che sono in $W^{k,1}(\Omega)$.

Esempio 5.7. *Sia $\Omega = (-1, 1)$, sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cosí definita:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \ x \in (0, 1] \\ \\ 0, & se \ x \in [-1, 0], \end{cases}$$

f è una distribuzione e quindi è infinite volte derivabile, ma non è drivabile in senso debole su Ω. Calcoliamo la derivata nel senso delle distribuzioni di f su Ω.

$$< Df, \varphi > = \ - < f, D\varphi >= - \int_{-1}^{1} f(x) \, D\varphi(x) \ dx \ == \ - \int_{-1}^{0} f(x) \, D\varphi(x) \ dx \ + \int_0^1 f(x) \, D\varphi(x) \ dx \ =$$

$$- \int_0^1 D\varphi(x) \ dx \ = \ \varphi(0), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quindi

$$< Df, \varphi > = \ \varphi(0), \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Su $\mathcal{D}'(\Omega)$ mettiamo la *topologia forte del duale* cioé quella individuata dalla famiglia di seminorme

$$q(T) = q(T, \varphi_1, \cdots, \varphi_h) = \sup_{1 \leq i \leq h} | < T, \varphi_i > |, \ \ \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

dove $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_h\}$ è un arbitrario sottoinsieme finito di $\mathcal{D}(\Omega)$.
Si avrà quindi che una successione di distribuzioni $\{T_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ converge a T in $\mathcal{D}'(\Omega)$ se e solo se, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, risulta $< T_h, \varphi > \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} < T, \varphi >$ in $\mathbb{R}$.

La derivazione di una distribuzione è un'applicazione lineare e continua di $\mathcal{D}'(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Infatti se $T_h \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ allora $D^\alpha T_h \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} D^\alpha T$, perché, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e per ogni $\alpha \in N^n$, si ha

$$< D^\alpha T_h, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_h, D^\alpha \varphi > \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >=< D^\alpha T, \varphi > .$$

Definizione 5.8. *Diremo che uno spazio E di distribuzioni è* **normale** *se*

(1) $\mathcal{D}(\Omega) \subset E \subset \mathcal{D}'(\Omega)$;

(2) Le immersioni di E in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e di $\mathcal{D}(\Omega)$ in E sono continue;

(3) $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in E.

6 Duali degli spazi di Sobolev

Consideriamo lo spazio $H_0^{k,q}(\Omega)$ (che è la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ nella norma $\|\cdot\|_{k,q,\Omega}$), questo è uno spazio normale di distribuzioni su Ω. Il suo duale si può identificare algebricamente con un sottospazio di distribuzioni su Ω. Indichiamo con $H^{-k,q'}(\Omega)$ $\Big($dove $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1\Big)$ questo spazio di distribuzioni, cioè:

$$H^{-k,q'}(\Omega) \;=\; \big(H_0^{k,q'}(\Omega)\big)'.$$

Per $k=0$: $\big(H_0^{0,q}(\Omega)\big)' \;=\; \big(L^q(\Omega)\big)' \;=\; L^{q'}(\Omega) \;=\; H^{0,q'}(\Omega)$.

Osservazione 6.1. *Il duale $\big(H^{1,q}(\Omega)\big)'$ dello spazio di Sobolev $H^{1,q}(\Omega)$ non è uno spazio di distribuzioni.*

Questo è conseguenza del fatto che $\mathcal{D}(\Omega)$ non è denso in $H^{1,q}(\Omega)$. La restrizione a $\mathcal{D}(\Omega)$ di ogni $T \in \big(H^{1,q}(\Omega)\big)'$ è una distribuzione, ma questa non identifica T come si può vedere anche dal seguente esempio.

Esempio 6.2. *Sia $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $\|f(x)\|_n \geq c > 0$, q.o. in Ω e $div\, f = 0$. Definiamo*

$$T\varphi = \int_\Omega (f, \nabla\varphi)_n \; dx.$$

Poiché $|T\varphi| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ si ha che $T \in \big(H^{1,q}(\Omega)\big)'$. La restrizione a $\mathcal{D}(\Omega)$ di T è il funzionale zero. *Infatti in $\mathcal{D}'(\Omega)$ si ha*

$$< T, \varphi >= \int_\Omega (f, \nabla\varphi)_n \; dx \;=\; - \int_\Omega div\, f(x)\, \varphi(x) \; dx \;=\; - < div\, f, \varphi >= 0$$

Teorema 6.3. *Lo spazio $H^{-k,q'}(\Omega)$ è costituito da tutte e sole le distribuzioni T su Ω tali che*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha, \quad f \in L^{q'}(\Omega), \tag{34}$$

(D^α è intesa nel senso delle distribuzioni).

Dimostrazione. Per semplicità dimostriamo il teorema per $k=1$.
Sia $E = \overbrace{L^q(\Omega) \times \cdots \times L^q(\Omega)}^{n-\text{volte}}$ munito della norma

$$\|w\|_E \;=\; \sum_{h=1}^{n} \|w_h\|_{L^q(\Omega)}, \;\; w = (w_1, \cdots, w_n). \tag{35}$$

L'applicazione $\Psi : H_0^{1,q}(\Omega) \longrightarrow E$ che associa ad ogni u il vettore $(D_1 u, \cdots, D_n u)$ è un'isometria di $H_0^{1,q}(\Omega)$ in E. Siano $G = \Psi\big(H_0^{1,q}(\Omega)\big)$, munito della norma indotta da E, e $S = \Psi^{-1} : G \longrightarrow H_0^{1,q}(\Omega)$. Quindi ogni $u \in H_0^{1,q}(\Omega)$ risulterà immagine di un $w \in G$ mediante S, cioé $Sw = u$ e quindi

$$< T, u >=< T, Sw > .$$

Questa è una forma lineare e continua su G.
Per il teorema di Hahn-Banach([13]) sappiamo che esiste un funzionale lineare e continuo Φ su E tale che

$$\|\Phi\|_{E'} = \|T\|_{\left(H_0^{-1,q}(\Omega)\right)'},$$

[13]Se M è uno sottospazio vettoriale topologico di uno s.v. X e se S è un funzionale limitato su M allora S può essere esteso ad un funzionale lineare F su X tale $\|F\|_{X'} \;=\; \|S\|_{M'}$.

Per il teorema di rappresentazione di Riesz-Fischer , esistono $f_1, \cdots, f_n \in L^{q'}(\Omega)$ tali che

$$< \Phi, w >= \int_\Omega f_1\, w_1\, dx \,+\, \cdots \,+ \int_\Omega f_n\, w_n\, dx$$

e

$$\|\Phi\|_{E'} = \|(f_1, \cdots, f_n\|_{[L^q(\Omega)]^n}.$$

Calcolando T su G si ha, per ogni $u \in H_0^{1,q}(\Omega)$

$$< \Phi, w >= \int_\Omega f_1\, D_1 u\, dx \,+\, \cdots \,+ \int_\Omega f_n\, D_n u\, dx.$$

Viceversa se vale (34), allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$< T, \varphi >=< \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f_\alpha, \varphi >= \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} < f_\alpha, D^\alpha \varphi >= \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha, D^\alpha \varphi\;\, dx.$$

Poiché φ è denso in $H_0^{k,q}(\Omega)$ e $f_\alpha \in L^{q'}(\Omega)$ allora T è lineare e continuo su $H_0^{k,q}(\Omega)$ cioè appartiene a $H_0^{-k,q'}(\Omega)$.

□

Osserviamo che $H^{-k,q'}(\Omega)$ è uno spazio di Banach (in quanto duale di uno spazio di Banach) con la norma

$$\|T\|_{-k,q',\Omega} \;=\; \sup_{u\in H_0^{k,q}(\Omega)} \frac{< T, u >}{\|u\|_{H_0^{k,q}(\Omega)}}. \tag{36}$$

È anche evidente che la rappresentazione (34) del funzionale T non è unica. Poniamo

$$\|T\|^*_{-k,q',\Omega} \;=\; \inf\big(\sum_{|\alpha|\le k} \|f_\alpha\|^{q'}_{L^{q'}(\Omega)}\big)^{\frac{1}{q'}}, \tag{37}$$

dove l'*inf* varia tra tutte le possibili rappresentazioni del funzionale (34). Si vede facilmente che$\|T\|^*_{-k,q',\Omega}$ è una norma in $H^{-k,q'}(\Omega)$ e che con questa norma è uno spazio di Banach.([14]).
Inoltre vale la seguente proposizione

Proposizione 6.4. *Le norme (36) e (37) sono equivalenti: esiste $c > 0$ tale che*

$$c\,\|T\|^*_{-k,q',\Omega} \;\le\; \|T\|_{-k,q',\Omega} \;\le\; \|T\|^*_{-k,q',\Omega} \tag{38}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $H_*^{-k,q'}(\Omega)$ lo spazio dei funzionali lineari e continui su $H_0^{k,q}(\Omega)$ con la norma (37). L'immersione

$$H_*^{-k,q'}(\Omega) \;\longrightarrow\; H^{-k,q'}(\Omega)$$

è lineare e bigettiva. Inoltre risulta anche continua perché per ogni rappresentazione (34) del funzionale T e per ogni $u \in H_0^{k,q}(\Omega)$ si ha:

$$\begin{aligned} |< T, u >| \;&\le\; \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |f_\alpha(x)||D^\alpha u(x)|\;\, dx \;\le\; \sum_{|\alpha|\le k} \Big(\int_\Omega |f_\alpha(x)|^{q'}\, dx\Big)^{\frac{1}{q'}} \Big(\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \;\le \\ &\le\; \Bigg(\sum_{|\alpha|\le k} \|f_\alpha(x)\|^{q'}_{L^{q'}(\Omega)}\Bigg)^{\frac{1}{q'}} \Bigg(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u(x)\|^q_{L^q(\Omega)}\Bigg)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{39}$$

[14]Infatti sia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{-k,q'}(\Omega)$ una successione di Cauchy rispetto alla norma (37). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un successione $\{g_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $|\alpha| \le k$, ciascuna delle quali appartiene a $L^{q'}(\Omega)$, che individua mediante la (34) il funzionale T_n, ed è tale che esiste $n_0 > 0$ per cui, se $m, n > n_0$ allora

$$\|g_{\alpha,n} \;-\; g_{\alpha,m}\|_{L^{q'}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Per la completezza di $L^{q'}(\Omega)$ si ha che esiste $g_\alpha \in L^{q'}(\Omega)$ tale che $g_{\alpha,n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_\alpha$ Il funzionale $T = \sum_{|\alpha|\le k} g_\alpha$ è tale che $T_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$ nella norma (37).

$\square$

Da cui
$$\|T\|_{-k,q',\Omega} \leq \|T\|^*_{-k,q',\Omega}.$$

Da questa maggiorazione otteniamo la tesi in quanto sono verificate le ipotesi del teorema dell'*immagine aperta di Banach* ([15]) e quindi l'applicazione

$$H^{-k,q'}(\Omega) \longrightarrow H_*^{-k,q'}(\Omega)$$

risulta continua.
È ovvio che $H^{-0,q'}(\Omega) = L^{q'}(\Omega)$. Essendo poi

$$H_0^{k,q}(\Omega) \subset H_0^{k-j,q}(\Omega), \ \ (0 \leq j < k),$$

con immersione continua, risulta anche

$$H_0^{j-k,q'}(\Omega) \subset H_0^{-k,q'}(\Omega), \ \ (0 \leq j < k),$$

con immersione continua. Infatti

$$\|T\|_{-k,q',\Omega} = \sup_{u \in H_0^{k,q}(\Omega)} \frac{|<T,u>|}{\|u\|_{k,q,\Omega}} \leq c \sup_{u \in H_0^{k,q}(\Omega)} \frac{|<T,u>|}{\|u\|_{k-j,q,\Omega}} \leq \sup_{u \in H^{k-j,q}(\Omega)} \frac{|<T,u>|}{\|u\|_{k-j,q,\Omega}} = \|T\|_{j-k,q',\Omega}.$$

Si ha anche che
$$H_0^{-k,p'}(\Omega) \subset H_0^{-k,q'}(\Omega), \ \text{ per ogni } \ p' \geq q' \text{ ovvero } p \leq q.$$

con immersione continua
Infatti poiché $H_0^{k,q}(\Omega) \subset H_0^{k,p}(\Omega)$, per $p \leq q$ si ha

$$\|T\|_{-k,q',\Omega} = \sup_{u \in H_0^{k,q}(\Omega)} \frac{|<T,u>|}{\|u\|_{k,q,\Omega}} \leq c \sup_{u \in H_0^{k,q}(\Omega)} \frac{|<T,u>|}{\|u\|_{k,p,\Omega}} \leq \sup_{u \in H^{k,p}(\Omega)} \frac{|<T,u>|}{\|u\|_{k,p,\Omega}} = \|T\|_{-k,p',\Omega}.$$

7 Traccia di una funzione.

Consideriamo una funzione f definita su di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia S una superficie $n-1$ dimensionale che appartiene a $\overline{\Omega}$. Vogliamo definire **la traccia di f su S**.
Se definiamo la traccia di f su S come la restrizione $f_{|S}$ questa può essere o no una buona definizione a secondo del tipo di funzione che si prende. Se f è una funzione definita in ogni punto (cioé l'eguaglianza di due funzioni è intesa come eguaglianza dei loro valori in ogni punto) allora $f_{|S}$ (e quindi anche la traccia) è ben definita. Se f è una funzione definita q. o. su Ω (ad esempio una rappresentante di una classe di equivalenza di funzioni di $L^q(\Omega)$ cioé due funzioni sono equivalenti se coincidono q. o.) il valore di f su S non è assegnato in modo univoco, perché *mis* $S = 0$, quindi, su S, f può assumere qualunque valore.
Nel caso in cui $S = S(x_n) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega : \ x_n = cost.\}$ allora per q. o. x_n (per il teorema di Fubini) esiste $f_{|S(x_n)}$ definito q.o. su S (l'eguaglianza tra funzioni di di $n-1$ variabili è intesa come l'eguaglianza q. o. rispetto ad una misura $n-1$ dimensionale).
È evidente che se f appartiene a $C^0(\overline{\Omega})$ allora per q. o. x_n risulta $f_{|S(x_n)} \in C^0(S(x_n))$, mentre se $f \in L^1(\Omega)$ allora per q. o. x_n si ha $f_{|S(x_n)} \in L^1(S(x_n))$.

[15] Se X e Y sono spazi di Banach e se Λ è un'applicazione lineare e continua di X su Y che sia bigettiva, allora esiste $c > 0$ tale che, per ogni $x \in X$, si abbia
$$\|x\|_X \leq c\,\|\Lambda x\|_Y$$
Ovvero Λ^{-1} è un'applicazione lineare e continua di Y su X.

Sia Ω_0, aperto limitato di $\mathbb{R}^{n-1}$ e $x_0 = (x_1, \cdots, x_{n-1})$. Consideriamo l'aperto $\Omega = \Omega_0 \times (0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Sia $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, allora per ogni x_0 appartenente a Ω_0 e $0 < x_n < a$ si ha:

$$\varphi(x_0, 0) \,=\, \varphi(x_0, x_n) \,-\, \int_0^{x_n} \frac{\partial \varphi(x_0, t)}{\partial t}\, dt. \tag{40}$$

$$|\varphi(x_0,0)|^q \,\leq\, 2^q\, |\varphi(x)|^q \,+\, 2^q \left[\int_0^a \left| \frac{\partial \varphi(x_0,t)}{\partial t} \right| \, dt \right]^q \leq 2^q\, |\varphi(x)|^q \,+\, 2^q\, a^{q-1} \int_0^a \left| \frac{\partial \varphi(x_0,t)}{\partial x_n} \right|^q \, dx_n. \tag{41}$$

Integriamo tra 0 e a rispetto a x_n:

$$|\varphi(x_0,0)|^q \,\leq\, \frac{2^q}{a} \int_0^a |\varphi(x_0, x_n)|^q \, dx_n \,+\, 2^q\, a^{q-1} \int_0^a \left| \frac{\partial \varphi(x_0,t)}{\partial x_n} \right|^q \, dx_n. \tag{42}$$

Integriamo rispetto a x_0 su Ω_0:

$$\|\varphi(x_0, 0)\|^q_{0,q,\Omega_0} \,\leq\, \frac{2^q}{a}\, \|\varphi\|^q_{0,q,\Omega} \,+\, 2^q\, a^{q-1} \|\varphi\|^q_{1,q,\Omega}. \tag{43}$$

Poniamo $\gamma_0 \varphi = \varphi(x_0, 0)$ (**traccia di** φ **su** $\mathbf{\Omega}_0 \times \{\mathbf{0}\}$) ed otteniamo

$$\|\gamma_0\, \varphi\|_{0,q,\Omega_0} \,\leq\, c(q,a)\, \|\varphi\|_{1,q,\Omega}. \tag{44}$$

Consideriamo lo spazio $H^1(\Omega)$ e definiamo la traccia delle funzioni ad esso appartenenti.
Sia $\{u_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ convergenti ad una funzione u nella norma $\|\cdot\|_{1,q,\Omega}$. Da (44) segue, per ogni m, $h \in \mathbb{N}$:

$$\|\gamma_0\, u_h \,-\, \gamma_0\, u_m\|_{0,q,\Omega_0} \,\leq\, c(q,a)\, \|u_h \,-\, u_m\|_{1,q,\Omega}. \tag{45}$$

Quindi $\{\gamma_0\, u_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\|\cdot\|_{0,q,\Omega_0}$. Sia $v \in L^q(\Omega_0)$ tale che $\gamma_0\, u_h \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} v$ in $L^q(\Omega_0)$.
Da (44) segue, per ogni $h \in \mathbb{N}$:

$$\|\gamma_0\, u_h\|_{0,q,\Omega_0} \,\leq\, c(q,a)\, \|u_h\|_{1,q,\Omega}. \tag{46}$$

Da cui passando al limite per h che tende a infinito:

$$\|v\|_{0,q,\Omega_0} \,\leq\, c(q,a)\, \|u\|_{1,q,\Omega}. \tag{47}$$

Se $\{w_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è un'altra successioni di funzioni appartenenti a $C^1(\overline{\Omega})$ che tende a u nella norma di $H^{1,q}(\Omega)$ allora da (45) segue, per ogni $h \in \mathbb{N}$:

$$\|\gamma_0\, u_h \,-\, \gamma_0\, w_h\|_{0,q,\Omega_0} \,\leq\, c(q,a)\, \|u_h \,-\, w_h\|_{1,q,\Omega}. \tag{48}$$

Questo implica che $\gamma_0\, u_h \,-\, \gamma_0\, w_h \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ovvero $\gamma_0\, w_h \overset{h \to +\infty}{\longrightarrow} v$ in $L^q(\Omega)$.
Da queste osservazioni deduciamo che v non dipende dalla scelta della successione approssimante della u in $H^{1,q}(\Omega)$. Ad ogni $u \in H^{1,q}(\Omega)$ resta associata in maniera univoca una funzione $v \in L^q(\Omega_0)$, che chiamiamo **traccia di u su** $\mathbf{\Omega_0}$ e scriviamo

$$\gamma_0\, u \,=\, v. \tag{49}$$

Se u è una funzione di $C^1(\overline{\Omega})$ allora $\gamma_0 u$ coincide con la sua restrizione a Ω_0. Inoltre, per (46), γ_0 è un'applicazione lineare e continua di $H^{1,q}(\Omega)$ in $L^q(\Omega_0)$.

Osservazione 7.1. *Sia* $u \in H^{1,q}(\Omega)$. *La definizione di traccia è una generalizzazione della nozione di restrizione di una funzione ad una superficie* $n-1$ *dimensionale.*
Infatti per q. o. $x_n \in [0, a]$ *la traccia* $\gamma_0 u$ *su* $S(x_n) = \Omega_0 \times \{x_n\}$ *e* $u_{|S(x_n)}$ *coincidono q. o. in* Ω_0. *Questo segue dal fatto che se* $\{u_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ *una successione di funzioni di* $C^1(\overline{\Omega})$ *è tale che* u_h *tende a* u *nella norma di* $L^q(\Omega)$, *quindi esiste una sottosuccessione* $\{u_{h_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ *che tende ad* u *q. o. in* Ω, *ne segue che per q. o.* x_n $\gamma_0 u_{h_k} \,=\, u_{h_k|S(x_n)}$ *tende a* $u_{|S(x_n)}$ *q. o. nella misura* $n-1$ *dimensionale.*

Osservazione 7.2. *Se u appartiene $C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ allora $\gamma_0\, u = u_{|S(x_n)}$ (per la dimostrazione si veda [4]*

Osservazione 7.3. *Se u è una funzione di $H_0^{1,q}(\Omega)$ allora la sua traccia su $S(0)$ è nulla, perché u è il limite in $H^{1,q}(\Omega)$ di funzioni $C_0^\infty(\Omega)$ e quindi $\gamma_0 u_h = 0$ (su $S(0)$).*

Possiamo ora generalizzare quanto detto sopra ad aperti di qualunque tipo, purché aventi la frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Supponiamo inoltre che esista un aperto Ω^* contenuto in Ω tale che $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = \Gamma$, ed un omeomorfismo $\xi = \mathcal{T}(x)$ di classe C^1 che manda $\overline{\Omega^*}$ nel cilindro $A = \{(\xi_0, \xi_n) : \ \xi_0 \in \Omega_0, \ \ 0 \leq \xi_n \leq a\}$. [16] $\mathcal{T}$ è un omeomorfismo che manda $H^{1,q}(\Omega^*)$ in $H^{1,q}(A)$. Se u è una funzione di $H^{1,q}(\Omega^*)$ allora $\tilde{u}(\xi) = u(\mathcal{T}^{-1}(\xi))$ appartiene a $H^{1,q}(A)$ e valgono le diseguaglianze:

$$c_1\|\tilde{u}\|_{1,q,A} \ \leq \ \|u\|_{1,q,\Omega^*} \ \leq \ c_2\,\|\tilde{u}\|_{1,q,A}. \tag{50}$$

(c_1, c_2 sono costanti positive che dipendono da $\mathcal{T}$ ma non da u).
Sia g una funzione definita su Γ, poniamo $\tilde{g}(\xi) = g(\mathcal{T}^{-1}(\xi))$.
Diremo che $g \in L^q(\Gamma)$, $q \geq 1$, se $\tilde{g} \in L^q(\Omega_0)$ e poniamo

$$\int_\Gamma |g(x)|^q\, d\sigma \ = \ \int_{\Omega_0} |\tilde{g}(\xi)|^q \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right)^2}\, d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}. \tag{51}$$

Si dimostra che la sommabilità in $L^q(\Gamma)$ di g ed il valore dell'integrale (51) non dipendono dalla scelta dell'omeomorfismo $\mathcal{T}$.
Consideriamo la funzione $u \in H^{1,q}(\Omega)$ ed in particolare la sua restrizione a Ω^*, quindi $u \in H^{1,q}(\Omega^*)$. La sua trasformata mediante $\mathcal{T}$, cioé $\tilde{u}$ appartiene a $H^{1,q}(A)$ e per quanto detto in precedenza $\tilde{u}$ su Ω_0 che risulta appartenere a $L^q(\Omega_0)$.
Definiamo traccia di u su Γ la funzione $\gamma_0\tilde{u}(\mathcal{T}(x))$ (che indichiamo con la notazione $\gamma_0 u$).
Dalla definizione segue che $\gamma_0 u \in L^q(\Gamma)$.
In questo modo abbiamo definito la traccia di una funzione appartenente a $H^{1,q}(\Omega)$ su ogni porzione di bordo Γ sufficientemente regolare.
Se definiamo la norma $L^q(\Omega)$ nel solito modo:

$$\|g\|_{0,q,\Gamma} \ = \ \left(\int_\Gamma |g(x)|^q \ dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{52}$$

γ_0 è ancora un'applicazione lineare che è continua da $H^{1,q}(\Omega)$ in $L^q(\Gamma)$ ed è un prolungamento dell'usuale applicazione di traccia di funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$.
Si dimostra il seguente teorema.

Teorema 7.4. *Se $\partial\Omega$ è di classe C^1, tutte e sole le funzioni u appartenenti a $H^{1,q}(\Omega)$ che hanno traccia nulla su $\partial\Omega$ appartengono a $H_0^1(\Omega)$.*

8 Commento bibliografico

Sono numerosi i testi che trattano a vari livelli gli spazi di Sobolev. Mi limito a segnalarne alcuni. Una introduzione elementare si può trovare in Michajlov [4] ed in Miranda [5]. Una trattazione completa è quella dell'ormai classico [1]. Generalizzazioni degli spazi di Sobolev si trovano in [6]. Anche per quanto riguarda gli spazi vettoriali topologici e la teoria delle distribuzioni i testi sono numerosi. Mi sembra semplice ed essenziale l'introduzione a questi argomenti contenuta in Rudin [7] e in Brezis [2]. Non si puo' comunque non citare a proposito delle distribuzioni il classico Schwartz [8]. Infine, a mio giudizio, l'introduzione più chiara ed al tempo stesso esauriente degli argomenti di questo capitolo è quella che si trova, sempre che non siano andate perdute, nelle dispense di Campanato [3], che mi sono state utilissime per redigere questi appunti.

[16] Ricordiamo il seguente risultato. Siano Ω_1 e Ω_2 aperti di $\mathbb{R}^n$ e ψ una bigezione di Ω_1 in Ω_2 di classe C^k. Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'applicazione di $L^q(\Omega_1)$ in $L^q(\Omega_2)$ così definita:

$$\mathcal{A}(u) \ = \ u(\psi(y)), \ \ y \in \Omega_2.$$

Allora $\mathcal{A}$ è un'applicazione lineare e continua di $W_{k,q}(\Omega_1)$ in $W^{k,q}(\Omega)$.

Riferimenti bibliografici

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces* Academic Press, N. Y., 1975.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : thorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] S. Campanato, *Dispense del corso di "Istituzioni di Analisi Superiore"* A.A. 1963/64, (Collocazione MXIV11).

[4] V. P. Michajlov, *Equazioni differenziali alle drivate parziali*, Edizioni Mir, Mosca, 1984.

[5] C. Miranda, *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, vol 1, Unione Matematica Italiana, 1978.

[6] S. M. Nikol'skii, *Spaces of differentiable functions*, Springer, 1991.

[7] W. Rudin, *Functional Anaysis*, Mc Graw-Hill, N. Y. 1991.

[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.