Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA I e II

Prova scritta del 6 settembre 2012

1) Dimostrare per induzione che:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 < \frac{n(n+1)^3}{2}, \ \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Svolgimento.
Procediamo per induzione. Per $k = 1$ é banalmente vera. Dimostriamo l'induttivitá della proposizione.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{n=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \leq \\ &\text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &\leq \frac{n(n+1)^3}{2} + (n+1)^3 = (n+1)^3 \frac{n+2}{2} < (n+1) \frac{(n+2)^3}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

infatti

$$(n+1)^3 \frac{n+2}{2} < (n+1) \frac{(n+2)^3}{2} \iff \frac{(n+1)^2}{2} < \frac{(n+2)^2}{2} \iff n+1 < n+2.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3 \tan^3 x} + 2x, \ \ (0 \leq x \leq \pi)$$

e tracciare il grafico.

Svolgimento.
Campo di esistenza: $[0, \pi] \setminus \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.
Comportamento agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \ \ \lim_{x \to \pi-} f(x) = -\infty, \ \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \pi, \ \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \pi.$$

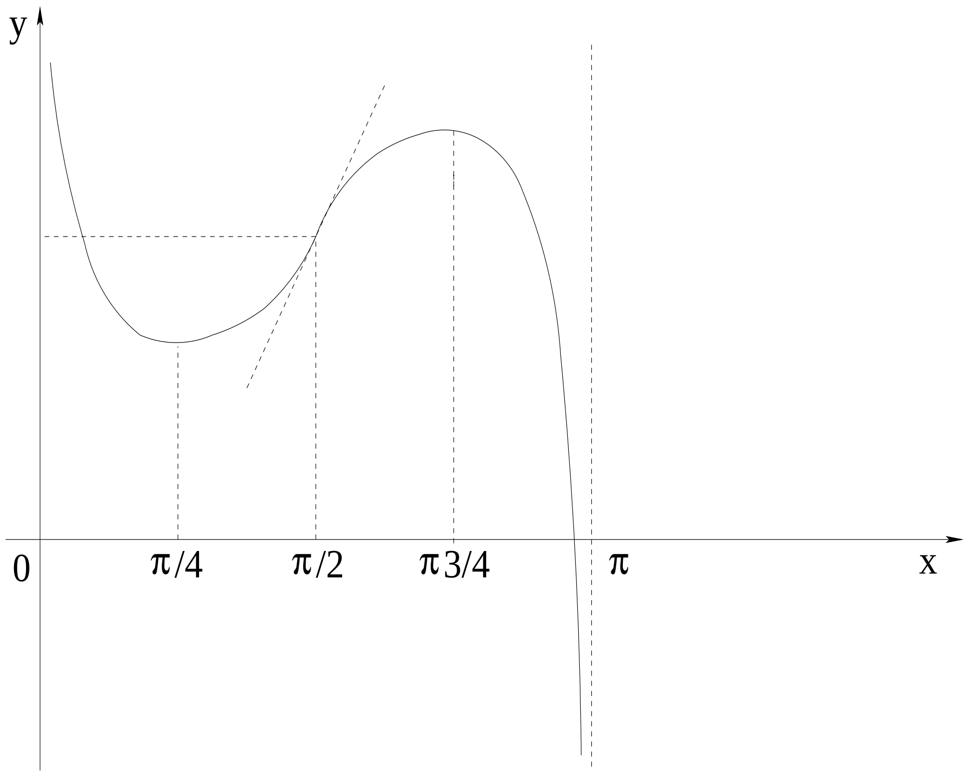
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = -\frac{1}{\tan^4 x}(1+\tan^2 x) + 2 = -\frac{1}{\tan^4 x} - \frac{1}{\tan^2 x} + 2 = \frac{-1-\tan^2 x + 2\tan^4 x}{\tan^4 x}.$$

Il segno di f' è determinato dal numeratore, ponendo $t = \tan^2 x$ ci riconduciamo alla risoluzione della disequazione $2t^2 - t - 1 > 0$. Le radici sono $t_1 = -\frac{1}{2}$ e $t_2 = 1$. L'unica soluzione accettabile, per la posizione fatta, è $t = 1$, ovvero $\tan^2 x = 1$, da cui $\tan x < -1$ oppure $\tan x > 1$. Queste disequazioni, riportate agli angoli nel dominio considerato, forniscono: $f'(x) > 0$ se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, su questi intervalli la funzione é crescente. Mentre $f'(x) < 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, su questi intervalli la funzione é decrescente.
Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá di f.

$$f''(x) = (1+\tan^2 x)\left(\frac{4}{\tan^2 x + 2}\right)\frac{1}{\tan^3 x}.$$

Il segno di f'' é determinato dal segno di $\tan x$. $f''(x) > 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, su questo interallo la funzione é convessa. $f''(x) < 0$ se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, su questo intervallo la funzione é concava.
Possiamo tracciare il grafico approssimato di f.



3) Studiare la convergenza della serie di potenze.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n\, (e^{\frac{1}{n^2}} - 1).$$

Svolgimento.

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}} = 1.$$

Infatti, per n sufficientemente grande, si ha

$$1 > e^{\frac{1}{n^2}} - 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) > \frac{1}{n^2},$$

e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.
Per $x = 1$ otteniamo, tenuto conto dello sviluppo visto sopra, che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Mentre per $x = -1$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n\; (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

che converge per il criterio di Leibniz perché nel termine generale della serie il coefficiente di $(-1)^n$ tende a zero decrescendo (basta fare la derivata prima di $f(t) = t\,(e^{\frac{1}{t^2}} - 1)$). Quindi la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$ e uniformemente sugli intervalli $[-1, 1-\delta]$, con con $0 < \delta < 2$.

4) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & 0 \le x \le 1 \\ 1 - \cos^2 \dfrac{\pi}{\sqrt[3]{x}} & 1 < x, \end{cases} \tag{2}$$

a) Dire se esiste finito l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) Posto $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, stabilire per quali valori di $x \ge 0$ risulta

i) F é continua.

ii) F é derivabile.

Svolgimento.

a) Scomponiamo l'integrale nella somma:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \int_0^1 f(t)\,dt \;=\; \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} e^{t^2}\,dt \;+\; \int_0^{+\infty} \left(1 \;-\; \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dt.$$

Consideriamo il secondo integrale determinando l'andamento della funzione integranda all'infinito.

$$1 \;-\; \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}} \;=\; 1 \;-\; \left[1 \;-\; \frac{\pi^2}{2\sqrt[3]{x^2}} \;+\; o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\right]^2 \;=\; \frac{\pi^2}{\sqrt[3]{x^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

Questa si comporta come $\dfrac{1}{x^{2/3}}$, essendo l'esponente minore di uno si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; +\infty.$$

b) Osserviamo che possiamo scrivere

$$F(x) \;=\; \int_0^1 f(t)\,dt \;+\; \int_1^x f(t)\;dt,$$

che ovviamente é derivabile (e quindi continua)su $(1, +\infty)$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. Resta da stabilire il suo comportamento nel punto $x = 1$. In questo punto F risulta continua perché se $x > 1$:

$$|F(x) - F(1)| \;=\; \left|\int_0^x f(t)\,dt \;-\; \int_0^1 f(t)\,dt\right| \;=\; \left|\int_1^x f(t)\,dt\right| = \int_1^x \left|1 - \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}\right|\,dx \;\leq$$

$$\leq \int_1^x \left(1 + \left|\cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}\right|\right)\,dx \;\leq 2\int_1^x 1\,dx \leq 2|x-1|.$$

Se $0 < x < 1$

$$|F(x) \;-\; F(1)| \;=\; \left|\int_1^x e^{t^2}\,dt\right| \;\leq\; e\,|x-1|.$$

Mentre F non é derivabile in $x = 1$ in quanto

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \left(1 \;-\; \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{t}}\right)\,dt \;=\; 1 \;-\; \cos^2 \pi \;=\; 0.$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(1-h) - F(1)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0+} \frac{-1}{h} \int_1^{1-h} e^{t^2}\,dt \;=\; e.$$