Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA I e II

Prova scritta del 12 giugno 2012

1) Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{h} = 3^n$$

Svolgimento

Applichiamo la formula di Newton della potenza ennesima di un binomio

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} 1^h 1^{k-h} = (1+1)^k = 2^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$

(2) Dimostrare che per ogni x tale che $0 < x < 2\pi$ e per ogni m, $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+n} e^{kix} \right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Svolgimento

Nella sommatoria effettuiamo il cambio di indice $h = k - m - 1$, quindi per $k = m + 1$ risulta $h = 0$, mentre per $k = m + n$ si ha $h = n - 1$. Otteniamo

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+n} e^{kix} \right| = \left| \sum_{h=0}^{n-1} e^{(h+m+1)ix} \right| = \left| \sum_{h=0}^{n-1} e^{hix} \, e^{(m+1)ix} \right|$$

Tenuto conto che $|e^{(m+1)ix}| = 1$ la sommatoria risulta uguale alla seguente

$$|e^{(m+1)ix}| \left| \sum_{h=0}^{n-1} e^{hix} \right| = \left| \sum_{h=0}^{n-1} e^{hix} \right|.$$

Il secondo membro rappresenta la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione e^{ix}, quindi

$$\left| \sum_{h=0}^{n-1} e^{hix} \right| = \frac{|e^{inx} - 1|}{|e^{ix} - 1|}.$$

Osserviamo che

$$|e^{ix\alpha} - 1| = |\cos(x\alpha) + i \sin(x\alpha) - 1| = \sqrt{[\cos(x\alpha) - 1]^2 + \sin^2(x\alpha)} =$$

$$= \sqrt{\cos^2(x\alpha) + 1 - 2\cos(x\alpha) + \sin^2(x\alpha)} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos(x\alpha)}.$$

Applicando le formule di bisezione di $\sin\beta$ ovvero $\sin\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$, con $\beta = x\alpha$ otteniamo

$$|e^{ix\alpha} - 1| = 2|\sin\frac{x\alpha}{2}|.$$

In definitiva:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} e^{kix}\right| = \frac{|e^{inx}-1|}{|e^{ix}-1|} = \frac{|\sin(\frac{nx}{2})|}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

perché se $x \in (0, 2\pi)$ allora $\frac{x}{2}$ appartiene all'intervallo $(0, \pi)$ dove la funzione *sin* è positiva.

3) Data la famiglia di funzioni

$$f_{a,n}(x) = x^{2n+1}\, e^{-ax^2}, \;\; a > 0, \;\; n \in \mathbb{N},$$

a) Dimostrare che $f_{a,n}$ è integrabile in $(0, +\infty)$.

b) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-ax^2}\; dx$$

in funzione di a e di n.

Svolgimento

a) Fissato n, per x sufficientemente grande, risulta

$$x^{2n+1} < e^{-\frac{a}{2}x^2} \iff \frac{x^{2n+1}}{e^{ax^2}} < \frac{1}{e^{\frac{a}{2}x^2}}$$

Essendo la funzione $e^{-\frac{a}{2}x^2}$ integrabile su $(0, +\infty)$, per il teorema del confronto anche $f_{a,n}$ lo è. Ricordiamo che lntegrabilità di $e^{-\frac{a}{2}x^2}$ segue dal teorema del confronto e dalla maggiorazione

$$e^{-\frac{a}{2}x^2} < e^{-\frac{a}{2}x},$$

su $[1, +\infty)$.

b)

Per $n = 0$ si ha, integrando per parti:

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-ax^2}\; dx \;=\; \frac{1}{2a}.$$

Sia $n > 0$.

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3}e^{-ax^2}\; dx \;=\; \frac{1}{-2a}\int_0^{+\infty} x^{2n+2}xe^{-ax^2}(-2a)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{2n+2}}{-2a}e^{ax^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}(2n+2)x^{2n+1}e^{-ax^2}\; dx = \frac{n+1}{a}\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}\; dx.$$

Nello stesso modo

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}\; dx \;=\frac{n}{a}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-ax^2}\; dx =$$

$$\frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty} x^{2n-3}e^{-ax^2}\; dx.$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3}e^{-ax^2}\; dx = \frac{(n+1)n(n-1)}{a^3}\int_0^{+\infty} x^{2n-3}e^{-ax^2}\; dx = \cdots = \int_0^{+\infty} x\, e^{-ax^2}\, dx \;=\; \frac{(n+1)!}{2a^{n+2}}.$$

Quindi possiamo dedurre che
$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-ax^2}\, dx \;=\; \frac{n!}{2a^{n+1}}.$$
Questa relazione si può dimostrare per induzione:
Per $n = 0$ si ha, integrando per parti:
$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-ax^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2a}.$$
Per quanto visto sopra è ovviamente induttiva

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-ax^2}\; dx \;=\; \frac{n+1}{a} \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\; dx = \frac{(n+1)!}{2a^{n+2}}$$

4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\log(1+\sqrt{y})} \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Tracciare un grafico approssimato della soluzione in un intorno di $x = 0$.

Svolgimento.

L'equazione differenziale proposta è a variabili separabili. Il secondo membro non si annulla nell'intorno del punto iniziale, quindi ammette soluzioni non costanti che determiniamo nel modo seguente.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log(1+\sqrt{y})} \iff \frac{dy}{dx}\; \log(1+\sqrt{y}) = 1$$
Integriamo primo e secondo membro tra 0 e x.

$$\int_0^x \frac{dy}{dx}\; \log(1+\sqrt{y})\;\; dx \;=\; \int_0^x 1\;\; dx = x. \tag{1}$$

Per risolvere l'integrale al primo membro di (1) effettuiamo il cambiamento di variabile:
$s = y(x)$, quindi $ds = \dfrac{dy}{dx}$, per $x = 0$ deduciamo dalla condizione iniziale assegnata nel problema di Cauchy che $s = y(0) = 1$, da cui

$$\int_0^x \frac{dy}{dx}\; \log(1+\sqrt{y})\;\; dx \;=\; \int_1^{y(x)} \log(1+\sqrt{s})\, ds \;=$$

$$\text{(integrando per parti)}$$

$$= \big[s \log(1+\sqrt{s})\big]_1^{y(x)} \;-\; \int_1^{y(x)} \frac{s}{2\sqrt{s}\,(1+\sqrt{s})}\;\; ds =$$

$$= y(x)\log(1+\sqrt{y(x)}) - \log 2 - \int_1^{y(x)} \frac{s}{2\sqrt{s}\,(1+\sqrt{s})}\;\; ds.$$

Per calcolare l'ultimo integrale procediamo al seguente cambio di variabile:

$r = \sqrt{s}$, da cui $ds = 2r\,dr$, quindi

$$\int \frac{s}{2\sqrt{s}\,(1+\sqrt{s})}\;ds \;=\; \int \frac{r^2}{1+r}\,dr \;\;= \int \frac{r^2-1+1}{1+r}\,dr \;=$$

$$\int (r-1)\,dr \;+\; \int \frac{1}{1+r}\,dr \;= \frac{1}{2}r^2 - r + \log(1+r) + C =$$

$$= \frac{1}{2}s - \sqrt{s} + \log(1+\sqrt{s}) + C.$$

Sostituendo sopra:

$$\int_0^x \frac{dy}{dx}\,\log(1+\sqrt{y})\;\,dx \;=\; y(x)\log(1+\sqrt{y(x)}) - \frac{1}{2}y(x) + \sqrt{y(x)} + \log(1+\sqrt{y(x)}) + \frac{1}{2}.$$

In definitiva la soluzione del problema di cauchy assegnato è definita implicitamente dall'equazione

$$y(x)\log(1+\sqrt{y(x)}) - \frac{1}{2}y(x) + \sqrt{y(x)} + \log(1+\sqrt{y(x)}) + \frac{1}{2} = x. \tag{2}$$

Per tracciare un grafico approssimato della soluzione y in un intorno di $x = 0$ non possiamo operare direttamente su y in quanto non èpossibile dedurre da (2) la sua espressione analitica. Operiamo quindi sull'equazione differenziale facendo le seguenti considerazioni.

a) La derivata prima di y è sempre positiva in quanto il secondo membro $\frac{1}{\log(1+\sqrt{y})} > 0$, dato che l'argomento del *logaritmo* è maggiore di 1. Quindi y è monotona crescente sul suo dominio.

b) La derivata seconda di y si deduce derivando l'equazione:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{1}{2\sqrt{y}\,[\log(1+\sqrt{y})]^2(1+\sqrt{y})}. \tag{3}$$

Poiché il secondo membro di (3) è costituito da composizione di funzioni continue (ricordiamo che y è addirittura di classe C^1 dato che è soluzione dell'equazione differenziale) allora y'' è continua, ed essendo $y''(0) = -\frac{1}{4(\log 2)^2}$, per il teorema della permanenza del segno risulta $y'' < 0$ in un intorno di $x = 0$, ossia y è convessa in un intorno di questo punto. Possiamo quindi tracciare il seguente grafico della soluzione dell'equazione in un intorno di $x = 0$: