

**Corso di Laurea in Fisica**  
**ANALISI MATEMATICA I e II**  
**Prova scritta del 17 luglio 2012**

(1) Siano  $z$  e  $w$  due numeri complessi non nulli. Dimostrare che

$$\operatorname{Re}(z/w) = 0$$

se e solo se le rette congiungenti 0 con  $z$  e 0 con  $w$  sono ortogonali.

**Svolgimento**

Se le rette congiungenti 0 con  $z$  e 0 con  $w$  sono ortogonali allora posto  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $w = \rho(\cos \beta + i \sin \beta)$  dalla formula del rapporto tra numeri complessi in forma trigonometrica deduciamo

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{r}{\rho} \left( \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \pm i \frac{r}{\rho} \sin \frac{\pi}{2},$$

perché, per l'ipotesi di ortogonalità si ha  $\alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2}$ , e quindi  $\cos \pm \frac{\pi}{2} = 0$ .

Viceversa, dire che la parte reale del rapporto  $z/w$  è nulla equivale a dire che esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\frac{z}{w} = ic. \tag{1}$$

Partendo da questa considerazione possiamo procedere in due modi.

1) Metodo di soluzione.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = ic \iff z\bar{w} = ic|w|^2.$$

Poniamo  $z = x + iy$ ,  $w = a + ib$  e sostituiamo

$$z\bar{w} = ic|w|^2 \iff (x + iy)(a - ib) = ic|w|^2 \iff (xa + yb) + i(ya - xb) = ic|w|^2.$$

Il termine al secondo membro dell'eguaglianza ha parte reale nulla quindi la parte reale del numero complesso al primo membro è nulla, ovvero  $xa + yb = 0$ . Poiché l'espressione  $xa + yb$  che rappresenta il prodotto scalare tra i vettori del piano di componenti  $(x, y)$  e  $(a, b)$  è nulla significa che questi sono tra loro ortogonali.

2) Metodo di soluzione.

Utilizzando la forma trigonometrica:  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $w = \rho(\cos \beta + i \sin \beta)$ , (1) si scrive come segue

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = c \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \iff \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}.$$

(2) Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) 2^k \leq 4^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**Svolgimento**

Poiché per ogni  $n \geq 1$

$$1 < \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

basta provare che

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) 2^k < 4^n. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Per  $n = 1$  è ovvia. L'induttività segue dall'osservare che

$$\sum_{k=0}^n (k+1) 2^k < 4^n + (n+1)2^n < 4^{n+1},$$

perché

$$, 4^n + (n+1)2^n < 4^{n+1} \iff (n+1)2^n < 3 \cdot 4^n,$$

che si verifica facilmente per induzione.

Altrimenti, si procede come segue.

Per  $n = 1$  è ovvia. Dimostriamo l'induttività della proposizione.

$$\sum_{k=0}^n (k+1) 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) 2^k + (n+1) 2^n \leq$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\leq 4^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + (n+1)2^n.$$

Otterremo la tesi provando

$$4^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + (n+1)2^n \leq 4^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ovvero

$$2^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + (n+1) \leq 2^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 \cdot 2^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Questa disuguaglianza è vera perché valgono le seguenti

$$2^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{2}$$

$$n+1 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{3}$$

La (2) è vera perché la successione  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è monotona crescente, mentre la (3) perché risulta  $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Resta da provare che

$$n+1 \leq 2^{n+1}.$$

Proviamo anche questa per induzione. Per  $n = 1$  è ovvia. Per quanto riguarda l'induttività si ha, banalmente, che

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n \geq n+1,$$

che è vera

**(3)** Studiare la funzione

$$f(x) = x - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

e tracciarne il grafico.

**Svolgimento**

Campo di esistenza:  $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$ . Determiniamo il comportamento della funzione negli intorno dei punti dove non è definita mediante i seguenti limiti

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty; \lim_{\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty; \lim_{\frac{3\pi}{2}^-} f(x) = +\infty; \lim_{\frac{3\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo.

$$f'(x) = 1 - (\cos x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \sin^2 x (\cos x)^{-\frac{4}{3}} = \frac{3(\cos x)^{\frac{4}{3}} - 2 \cos^2 x - 1}{3(\cos x)^{\frac{4}{3}}}$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre per studiare il segno del numeratore consideriamo la funzione

$$g(x) = 3(\cos x)^{\frac{4}{3}} - 2 \cos^2 x - 1.$$

Si ha che

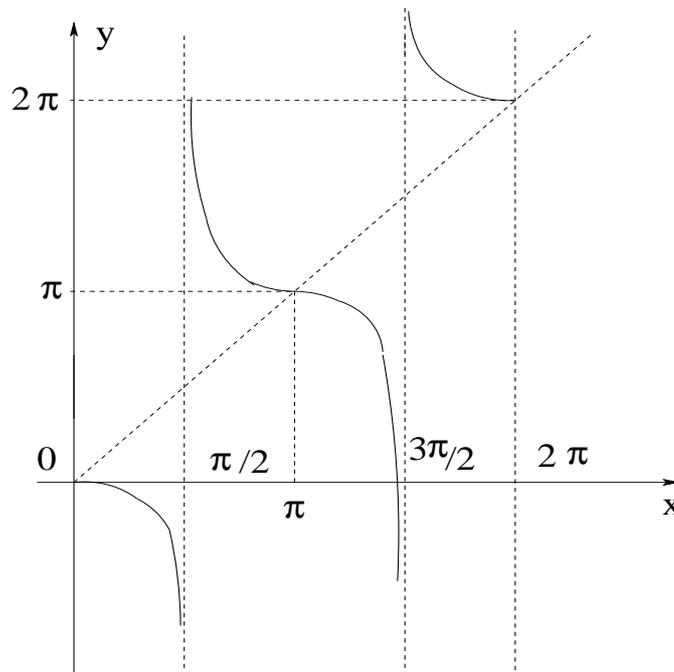
$$g'(x) = -\sin x [4(\cos x)^{\frac{1}{3}} - 4 \cos x]$$

Si ha che  $g'(x) \leq 0$  per ogni  $x$ . Infatti  $4(\cos x)^{\frac{1}{3}} - 4 \cos x > 0$  per  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  oppure  $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ . Tenuto conto del segno di  $-\sin x$  si ha che  $g'(x) < 0$  per  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  oppure  $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$  e positiva nel complementare. In particolare  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$  sono punti di minimo,  $g'(x) = 0$  per  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$  sono punti di massimo. Questo implica che essendo  $g(0) = 0$ ,  $g(\pi) = 0$ ,  $g(2\pi) = 0$  si ha  $g(x) \leq 0$  per ogni  $x$ . Ossia  $f'(x)$  è sempre negativa e quindi  $f$  è decrescente.

Per stabilire gli intervalli dove la funzione è concava o convessa calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{4}{9} (\sin x)^3 (\cos x)^{-\frac{5}{3}}$$

Da cui deduciamo che  $f'' > 0$  dove  $\sin x > 0$  e  $\cos x > 0$  oppure dove  $\sin x > 0$  e  $\cos x < 0$ . Cioè sugli intervalli  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  e  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , dove risulterà  $f$  convessa. In maniera analoga si deduce che  $f$  è concava sul complementare. In particolare il punto  $x = \pi$  è di flesso. Tenuto conto di quanto ottenuto possiamo tracciare il seguente grafico.



(4) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt[3]{e^{4nx} - x - 1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

a) dimostrare che, per ogni  $n$ ,  $f_n(x)$  è integrabile su  $(0, 1)$ ;

b) data una costante  $a$  tale che  $0 < a < 1$ , calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 f_n(x) dx;$$

c) calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

### Svolgimento

a) Appliciamo il criterio del confronto asintotico nell'intorno del punto  $x = 0$  che è l'unico zero del denominatore della funzione. Dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale con punto iniziale  $x = 0$  otteniamo

$$e^{4nx} - x - 1 = 4nx + o(nx) - x = x(4n - 1) + o(nx).$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(e^{4nx} - x - 1)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{(4nx)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{4n}{4n - 1}$$

La funzione data si comporta nell'intorno di  $x = 0$  come la funzione armonica  $x \rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$  che è integrabile.

Quindi anche  $f_n$  è integrabile per ogni  $n$ .

b) Per poter passare al limite dentro il segno di integrale vediamo se sull'intervallo  $(a, 1)$  la successione di funzioni converge uniformemente. A tale scopo calcoliamo la derivata prima.

$$f'_n(x) = -\frac{n^2(4ne^{4nx} - 1)}{3(e^{4nx} - x - 1)^{\frac{4}{3}}}$$

$f'_n$  risulta negativa su  $(0, 1)$ , quindi  $f_n$  è decrescente su questo intervallo. Queste considerazioni ci permettono di stabilire che per ogni  $n$

$$\sup_{[a,1]} f_n(x) = f_n(a) = \frac{n^2}{(e^{4na} - a - 1)^{\frac{1}{3}}}.$$

Da cui deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[a,1]} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(e^{4na} - a - 1)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Ossia la successione  $f_n$  converge uniformemente a zero, possiamo quindi concludere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 f_n(x) dx = \int_a^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0.$$

c) Lo stesso ragionamento non è applicabile su  $(0, 1)$  dato che puntualmente su questo intervallo la successione tende a zero mentre

$$\sup_{(0,1]} f_n(x) = +\infty.$$

Per determinare il valore del limite minoriamo l'integrale di  $f_n$  con l'integrale di una funzione della quale sappiamo calcolare una primitiva. La seguente maggiorazione vale per ogni  $x > 0$

$$e^{4nx} - x - 1 < e^{4nx}.$$

Otteniamo in definitiva

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = +\infty$$

perché per il criterio del confronto si ha

$$\int_0^1 \frac{n^2}{\sqrt[3]{e^{4nx} - x - 1}} dx > \int_0^1 \frac{n^2}{e^{\frac{4}{3}nx}} = n^2 \left[ -\frac{3}{4n} e^{-\frac{4}{3}nx} \right]_0^1 = -\frac{3n}{e^{\frac{4}{3}n}} + \frac{3}{4} n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$