Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 9 settembre 2012

(1) determinare i numeri complessi z e w tali che

$$\begin{cases} z^2\overline{w}^2 = -1+i \\ \\ \overline{z}^2 + w^2 = -1+2i \\ \\ Re\, z > 0 \\ \\ Re\, w > 0. \end{cases}$$

Svolgimento
Consideriamo il complesso coniugato della prima equazione del sistema

$$\begin{cases} \overline{z}^2 w^2 = -1-i \\ \\ \overline{z}^2 + w^2 = -1+2i \\ \\ Re\, z > 0 \\ \\ Re\, w > 0. \end{cases}$$

Ponendo $\overline{z}^3 = v$ e $w^3 = u$ si ottiene

$$\begin{cases} u\ v = -1-i \\ \\ u+v = -1+2i. \end{cases}$$

Le soluzioni u e v del sistema sono le soluzioni dell'equazioni di secondo grado

$$X^2 - (-1+2i)X + (-1-i) = 0.$$

Le radici sono $X_1 = i$ e $X_2 = -1+i$. Quindi $u = i$ e $v = -1+i$.
Dalle posizioni fatte sopra ci siamo ricondotti a risolvere $w^3 = i$ e $\overline{z}^3 = -1+i$. Quindi

$$w_{1,2,3} \in \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Mentre

$$\overline{z}_{1,2,3} \in \left\{ \sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{2};\ \sqrt[6]{2}\cos\frac{11\pi}{12} + i\sqrt[6]{2}\sin\frac{11\pi}{12};\ \sqrt[6]{2}\cos\frac{19\pi}{12} + i\sqrt[6]{2}\sin\frac{19\pi}{12} \right\}$$

Tenuto conto della seconda e della terza disequazione del sistema, possiamo concludere che le soluzioni sono (w_1, z_1) e (w_1, z_3).

(2) Al variare di $\alpha \geq 2$, studiare il comportamento per $n \to +\infty$ della successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ \\ a_{n+1} = \frac{16-9\,a_n}{1-a_n} \end{cases}$$

Svolgimento

Stabiliamo se la successione é ben definita osservando che risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 2$ se $\alpha > 2$, quindi il denominatore dell'espressione che definisce a_{n+1} non si puó mai annullare. Procedendo per induzione si ha che $a_1 = \alpha > 2$. Inoltre l'induttività $a_n > 2$ implica $a_{n+1} > 2$ segue dalle diseguaglianze

$$a_{n+1} = \frac{16 - 9\,a_n}{1 - a_n} > 2 \iff 16 - 9\,a_n < 2 - 2a_n \iff 14 < 7a_n \iff 2 < a_n.$$

Da questo segue che la successione è limita inferiormente.
Vediamo per quali valori di α è decrescente.

$$a_2 < a_1 \iff \frac{16 - 9\,\alpha}{1 - \alpha} < \alpha \iff \alpha^2 - 10\alpha + 16 < 0$$

Questa disequazione è verificata per $2 < \alpha < 8$.
Per applicare il principio di induzione resta da verificare che $a_n < a_{n-1}$ implica $a_{n+1} < a_n$, ovvero

$$\frac{16 - 9\,a_n}{1 - a_n} < \frac{16 - 9\,a_{n-1}}{1 - a_{n-1}} \iff (16 - 9\,a_n)(1 - a_{n-1}) < (16 - 9\,a_{n-1})(1 - a_n) \iff a_n < a_{n-1}.$$

La sucecssione ammette dunque limite $L \in \mathbb{R}$, per il teorema di regolarità delle successioni monotone, quindi passando al limite nella successione ricorsiva dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{16 - 9\,L}{1 - L} = L \iff L^2 - 10L + 16 = 0$$

che ha soluzioni $L_1 = 2$ e $L_2 = 8$. la soluzione è $L_1 = 2$ perché $L_2 = 8$ non è punto di accumulazione per la successione.
Se $a_1 = \alpha > 8$ per quanto visto in precedenza $a_2 > a_1$. Mentre $a_n > a_{n-1}$ implica $a_{n+1} > a_n$, perché

$$\frac{16 - 9\,a_n}{1 - a_n} > \frac{16 - 9\,a_{n-1}}{1 - a_{n-1}} \iff (16 - 9\,a_n)(1 - a_{n-1}) > (16 - 9\,a_{n-1})(1 - a_n) \iff a_n > a_{n-1}.$$

La successione risulta monotona crescente. Se avesse limite reale L, questo dovrebbe risolvere l'equazione $L^2 - 10L + 16 = 0$, ovvero dovrebbe essere $L_1 = 2$ oppure $L_2 = 8$, ma poiché $a_1 > 8$ e la successione è crescente, nessuno dei due può essere punto di accumulazione per essa. Dunque la sucecssione diverge. Infine se $\alpha = 2$ si verifica, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2$, mentre se $\alpha = 8$ si verifica, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 8$. Riassumendo: se $2 \leq \alpha < 8$ il limite della successione è 2, se $\alpha = 8$ il limite è 8, mentre se $\alpha > 8$ il limite è $= +\infty$.

(3) Dimostrare per induzione che:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \; < \; \frac{n(n+1)^3}{2}, \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Svolgimento.

Procediamo per induzione. Per $k = 1$ é banalmente vera. Dimostriamo l'induttivitá della proposizione.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \; = \; \sum_{n=1}^{n} k^3 \; + \; (n+1)^3 \; \leq \\ &\text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &\leq \; \frac{n(n+1)^3}{2} \; + \; (n+1)^3 \; = \; (n+1)^3 \, \frac{n+2}{2} \; < \; (n+1) \, \frac{(n+2)^3}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

infatti

$$(n+1)^3\,\frac{n+2}{2} \;<\; (n+1)\,\frac{(n+2)^3}{2} \iff \frac{(n+1)^2}{2} \;<\; \frac{(n+2)^2}{2} \iff n+1 \;<\; n+2.$$