Analisi Matematica II - Corso di Laurea in Fisica

Prova scritta del 19 gennaio 2012

Risoluzione degli esercizi proposti

1) Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 3} - \sqrt{4x^2 - 2}$$
e tracciarne il grafico.

Svolgimento.

Determiniamo il campo di esitenza della funzione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 9x^2 - 3 > 0 \\ \\ 4x^2 - 2 > 0. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata sulle semirette $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ e $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$, mentre la seconda sulle semirette $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ e $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$. Da questa osservazione deduciamo che il campo di esistenza della funzione è dato dall'unione delle semirette $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ e $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Osserviamo che la funzione data è pari. Basta quindi studiarla per $x > 0$, ovvero sulla semiretta $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Determiniamo il comportamento di f agli estremi del dominio. $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Vediamo se esiste un asintoto obliquo calcolando i seguenti limiti.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2-3} - \sqrt{4x^2-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9 - \frac{3}{x^2}} - \sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} = 1. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2-3} - \sqrt{4x^2-2} - x = \lim_{x\to+\infty} 3x\sqrt{1 - \frac{1}{3x^2}} - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}} - x &= \\ \lim_{x\to+\infty} x\left[3\sqrt{1 - \frac{1}{3x^2}} - 2\sqrt{1 - \frac{1}{2x^2}} - 1\right] &= \\ \lim_{x\to+\infty} x\left\{3\left[1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - 2\left[1 - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - 1\right\} &= \\ \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Da (1) e (2) deduciamo che la funzione ammette come asintoto per $x \to +\infty$ la retta di equazione $y = x$.

Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia di f.

$$f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2-3}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-2}}.$$

Da cui si ha che $f'(x) > 0$ se $9x\sqrt{4x^2-2} > 4x\sqrt{9x^2-3}$. Essendo $x > 0$ possiamo elevare al quadrato, semplificando si ha
$$30x^2 - 19 > 0$$

Da questo segue che $f'(x) > 0$ per $x > \frac{19}{30}$, $f'(x) < 0$ per $x < \frac{19}{30}$. Nel punto $x_0 = \frac{19}{30}$ la funzione ammette un minimo relativo (che, in questo caso, è anche assoluto).

Calcoliamo f'' per stabilire gli intervalli di concavità o convessità di f.

$$f''(x) = \frac{-27}{\sqrt{(9x^2-3)^3}} + \frac{8}{\sqrt{(4x^2-2)^3}}.$$

Quindi

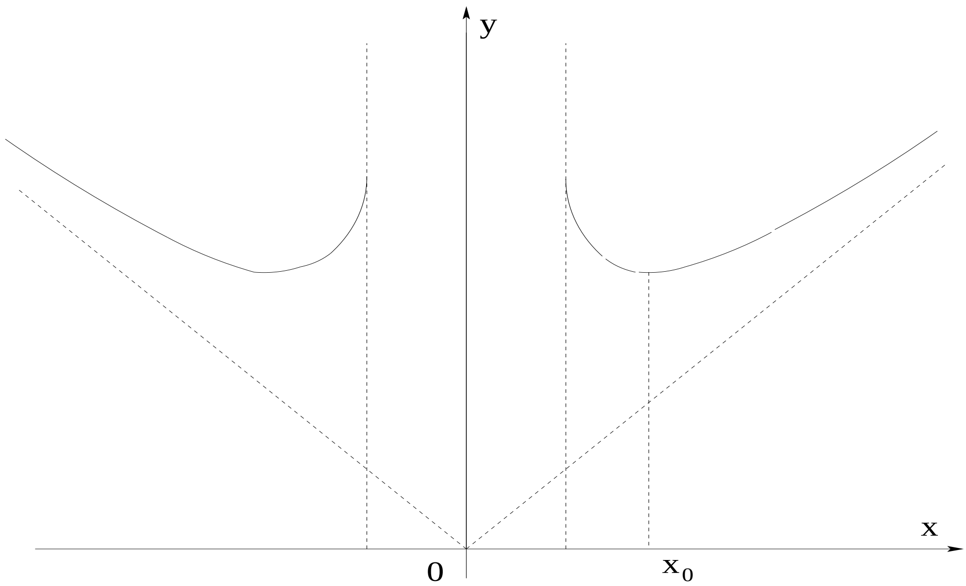
$$f''(x) > 0 \iff \frac{27}{\sqrt{(9x^2-3)^3}} < \frac{8}{\sqrt{(4x^2-2)^3}}.$$

Prendendo la radice cubica ed elevando al quadrato si ha

$$\frac{4}{9x^2-3} < \frac{9}{4x^2-2} \iff 4(9x^2-3) > 9(4x^2-2).$$

Che è verificata per ogni x. Quindi la funzione è convessa per $x > 0$.

Possiamo a questo punto tracciare un grafico approssimato di f, tenendo anche conto della parità della funzione.



2) Calcolare

$$\int \log(1+4x^2) \ \arctan 2x \quad dx.$$

Svolgimento.

Integriamo per parti([1]) prendendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log(1+4x^2) \ \arctan 2x$. Si puó anche considerare $f'(x) = \log(1+4x^2)$ e $g(x) = \arctan 2x$, ma in questo caso va calcolato, per parti, $\int \log(1+4x^2)\ dx$. Quindi se prendiamo $f'(x) = 1$, essendo $f(x) = x$, si ha

$$\begin{aligned}\int \log(1+4x^2) \ \arctan 2x \ dx \ = \ x \log(1+4x^2) \ \arctan 2x - \int \frac{8x^2}{1+4x^2} \arctan 2x \ dx + \\ - \int \frac{2x}{1+4x^2} \log(1+4x^2) \ dx.\end{aligned} \tag{3}$$

[1]
$$\int f'(x)\, g(x))\ dx \ = \ f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\ dx.$$

Risolviamo il primo integrale che compare al secondo membro di (3), aggiungendo e sottraendo 2 al numeratore.

$$\int \frac{8x^2}{1+4x^2} \arctan 2x \; dx \;=\; 2\int \frac{1+4x^2}{1+4x^2} \arctan 2x \;-\; \int \frac{2}{1+4x^2} \arctan 2x \;\; dx \;=$$

$$= 2\int \arctan 2x dx \;+\; \frac{1}{2}\,(\arctan 2x)^2$$

(integriamo per parti)

$$= 2x \arctan 2x \;-\; \int \frac{4x}{1+4x^2}\, dx \;+\; \frac{1}{2}\,(\arctan 2x)^2 = \tag{4}$$

$$= 2x \arctan 2x \;-\; \frac{1}{2}\int \frac{8x}{1+4x^2}\, dx \;+\; \frac{1}{2}\,(\arctan 2x)^2 =$$

$$= 2x \arctan 2x \;-\; \frac{1}{2}\log(1+4x^2) \;+\; \frac{1}{2}\,(\arctan 2x)^2 \;+\; C.$$

Risolviamo il secondo integrale al secondo membro di (3).

$$\int \frac{2x}{1+4x^2} \;\log(1+4x^2)\; dx \;=\; \frac{1}{4}\int \frac{8x}{1+4x^2} \;\log(1+4x^2)\; dx \;=\frac{1}{8}[\log(1+4x^2)]^2 + C. \tag{5}$$

Tenuto conto di (3)(4)(5) possiamo scrivere infine:

$$\int \log(1+4x^2) \;\; \arctan\, 2x \quad dx \;=\; x\,\log(1+4x^2) \;\; \arctan\, 2x \;-2x\, \arctan 2x \;+$$

$$+\frac{1}{2}\log(1+4x^2) \;+\; \frac{1}{2}\,(\arctan 2x)^2 \;-\; \frac{1}{8}[\log(1+4x^2)]^2 + C.$$

3) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2+1)}{2^n+n^3+1} \;\; x^n.$$

Svolgimento.

Calcoliamo il raggio di convergenza r della serie mediante la formula

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to+\infty} \;\sqrt[n]{\frac{\log(n^2+1)}{2^n+n^3+1}} = \frac{1}{2}.$$

Perché

$$\lim_{n\to+\infty} \;\sqrt[n]{\log(n^2+1)} = 1,$$

infatti, per ogni $n>1$, risulta

$$1 < \;\sqrt[n]{\log(n^2+1)} < \;\sqrt[n]{n^2+1} < \;\sqrt[n]{2n^2} < \;\sqrt[n]{2}\;\;\sqrt[n]{n^2} \;\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; 1.$$

Mentre per n sufficientemente grande

$$1 < \;\sqrt[n]{2^n+n^3+1} < \;\sqrt[n]{2^n+2^n} = \;\sqrt[n]{2^n}\;\sqrt[n]{2} = 2\,\sqrt[n]{2} \;\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; 2.$$

In conclusione il raggio di convergenza é $r=2$.

Stabiliamo il comportamento della serie agli estremi del dominio di convergenza. Per $x=2$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2+1)}{2^n+n^3+1} 2^n \;\;,$$

che diverge perché non verifica la condizione necessaria per la convergenza di una serie:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n^2+1)}{2^n + n^3 + 1} 2^n \; = \; +\infty.$$

Per $x = -2$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\log(n^2+1)}{2^n + n^3 + 1} 2^n \ ,$$

che é indeterminata in quanto é una serie a termini di segno alterno nella quale il coefficiente di $(-1)^n$ non é infinitesimo.

In conclusione la serie converge puntualmente sull'intervallo $(-2, 2)$, uniformemente sugli intervalli $[-\delta, \delta]$, con $0 < \delta < 2$.