Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 9 Giugno 2012

FILA 2

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.
Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1, \quad n > 1.$$

(2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{13x^2 - 3} - 4x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale l'identità

$$\int_0^{\pi} \cos^2(mx)\ dx \ = \ \frac{\pi}{2}$$

(4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 10u'(t) + 25u(t) = t\,e^t, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1, \ \ n > 1.$$

Svolgimento.
Dimostriamo per induzione.
Per $n = 2$ è verificata perché

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 1 \iff 2\sqrt{2} < 3.$$

Verifichiamo l'induttività della proposizione.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n+1} <$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1.$$

La validità dell'ultimo passaggio si dimostra nel modo seguente

$$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1 \iff 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2(n+1) \iff$$

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1 \iff 4n^2 + 4n < 4n^2 + 1 + 4n \iff 0 < 1.$$

(2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{13x^2 - 2} - 4x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento
Campo di esistenza.

$$13x^2 - 3 \geq 0 \iff x \leq -\sqrt{\frac{3}{13}} = x_1 \vee x \geq \sqrt{\frac{3}{13}} = x_2.$$

Limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{13x^2 - 3 - 16x}{\sqrt{13x^2 - 3} + 4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2 - 3}{\sqrt{13x^2 - 3} + 4x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{13x^2 - 3} - 4x = +\infty.$$

Si osservi che in questo caso il limite non si presenta in forma indeterminata.
Asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{13 - \frac{3}{x^2}} - 4 = \sqrt{13} - 4.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (\sqrt{13} - 4)x = \lim_{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{13x^2 - 3} + 4x} = 0.$$

Quindi l'asintoto per $x \to +\infty$ è: $y = (\sqrt{13} - 4)x$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{13 - \frac{3}{x^2}} - 4 = -\sqrt{13} - 4.$$

Nel passaggio sopra abbiamo utilizzato il fatto che se $x < 0$ allora $x = -\sqrt{x^2}$.

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) + (\sqrt{13} + 4)x = \lim_{x\to-\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{13x^2 - 3} - 4x} = 0.$$

Quindi l'asintoto per per $x \to -\infty$: $y = -(\sqrt{13} + 4)x$.
Studio della monotonia e dei massimi o minimi relativi mediante la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{13x}{\sqrt{13x^2 - 3}} - 4.$$

Risulta $f'(x) > 0$ per $13x > 4\sqrt{13x^2 - 3}$, ovvero

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 13x^2 - 3 \geq 0 \\ 169x^2 > 208x^2 - 64. \end{cases}$$

Da cui

$$\sqrt{\frac{3}{13}} < x < \frac{4}{\sqrt{13}} = x_3.$$

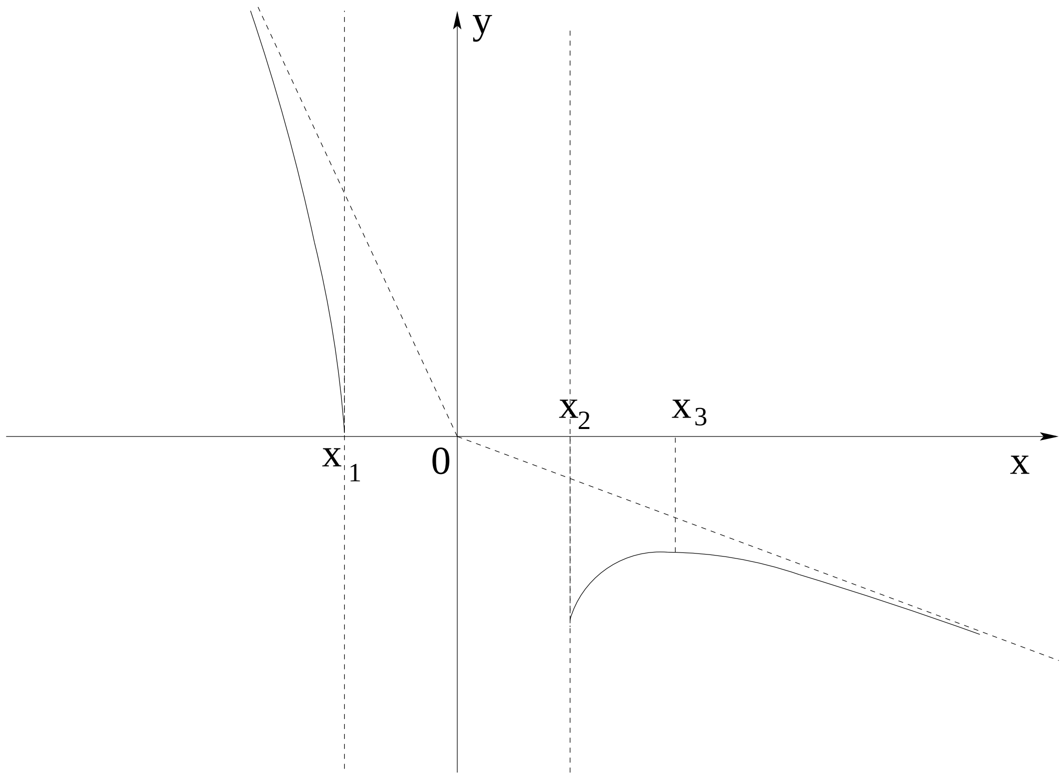
Su questo intervallo la funzione è crescente.
Inoltre la derivata prima è negativa negli intervalli

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{13}}\right) \text{ e } \left(\frac{4}{\sqrt{13}}, +\infty\right),$$

su questi intervalli la funzione è decrescente. Il punto $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$ è di massimo relativo.
Studio della conevessità o concavità mediante la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-69}{(13x^2 - 3)^2\sqrt{13x^2 - 3}}.$$

Risulta che per ogni $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{13}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{13}}, +\infty\right)$, la derivata seconda è negativa e quindi la funzione è convessa su ciascuna di queste semirette.



(3)
Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}\{0\}$ vale l'identità

$$\int_0^{\pi} \cos^2(mx)\ dx \ = \ \frac{\pi}{2}$$

Svolgimento.
Effettuiamo nell'integrale il seguente cambio di variabile:

$$mx = y,$$

da cui $dx = \frac{dy}{m}$. Mentre gli estremi diventano per $x = 0$, $y = 0$, e per $x = \pi$, $y = m\pi$. Di conseguenza, tenuto conto delle formule di duplicazione del *coseno*, possiamo scrivere

$$\int_0^{\pi} \cos^2(mx)\ dx \ = \ \frac{1}{m}\int_0^{m\pi} \cos^2 y\ \ dy = \frac{1}{m}\int_0^{m\pi} \frac{1+\cos 2y}{2}\ \ dy =$$

$$= \frac{1}{2m}[y]_0^{m\pi} \ + \ \frac{1}{2m}\int_0^{m\pi} \cos 2y\ dy = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4m}[\sin 2y]_0^{m\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

L'ultimo passaggio é giustificato dalla periodicità della funzione *seno*: $\sin 2m\pi = \sin 2\pi = 0$, per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

(4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 10u'(t) + 25u(t) = t\,e^t, \\ \\ u(0) = 0, \\ \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico associato risolvendo: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$. Questo ammette come radice $\lambda = 5$ con molteplicità 2. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è quindi

$$V_0 = \{C_1\, e^{5t} + C_2\, t\, e^{5t},\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo $u_f(t) = (At + B)e^t$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le sue derivate, $u_f'(t) = (A + B + At)e^t$, $u_f''(t) = (2A + B + At)e^t$, e sostituiamole nell'equazione

$$(2A + B + At)e^t - 10(A + B + At)e^t + 25(At + B)e^t = te^t.$$

Semplificando ed imponendo l'eguaglianza tra il polinomio al primo e quello al secondo membro otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 16A = 1 \\ \\ -8A + 16B = 0, \end{cases}$$

da cui $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{1}{32}$. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione è

$$V_f = \left\{ C_1\, e^{5t} + C_2\, t\, e^{5t} + \left(\frac{1}{16} t + \frac{1}{32} \right) e^t,\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali

$$u(0) = C_1 + \frac{1}{32} = 0,\ u'(0) = 5C_1 + C_2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0$$

dalle quali segue il sistema

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{32} = 0 \\ \\ 5C_1 + C_2 + \dfrac{3}{32} = 0, \end{cases} \iff C_1 = -\frac{1}{32},\ C_2 = \frac{1}{16}.$$

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{1}{32}\, e^{5t} + \frac{1}{16}\, t\, e^{5t} + \left(\frac{1}{16} t + \frac{1}{32} \right) e^t.$$