Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 15 Settembre 2012

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.

(1) (Punti 8) Risolvere il seguente sistema nel campo complesso:

$$\begin{cases} z^5 - \overline{z} = -1, \\ \overline{z}^{\,5} + z = i \\ Re\ z > 0 \\ Im\ z > 0. \end{cases}$$

(2) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin^2 x - \tan^2 x\right) \log(1+x^4)}{\cos x^2 + e^{\frac{x^4}{2}} - 2}.$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - 2x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\, dx$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) (Punti 8) Risolvere il seguente sistema nel campo complesso:

$$\begin{cases} z^5 - \overline{z} = -1, \\ \overline{z}^{\,5} + z = i \\ Re\ z > 0 \\ Im\ z > 0. \end{cases}$$

Svolgimento

Prendendo il complesso coniugato dalla seconda equazione otteniamo il seguente sistema che è equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} z^5 - \overline{z} = -1, \\ z^5 + \overline{z} = -i \\ Re\ z > 0 \\ Im\ z > 0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le prime due equazioni otteniamo

$$2\,z^5 = -1 - i \iff z^5 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Le soluzioni del sistema vanno quindi ricercate tra le radici quinte del numero $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ che scriviamo in forma trigonometrica al fine di applicare la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso:

$$-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\sin\frac{5}{4}\pi\right).$$

Quindi

$$z \in \sqrt[5]{-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}} = \left\{\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{5}\right)\right],\ \ k = 0,\,1,\,2,\,3,\,4\right\}.$$

Tra questi numeri complessi quelli che verificano anche le condizioni $Re\,z > 0$ e $Im\,z > 0$ sono quelli che hanno l'argomento compreso tra 0 e $\pi/2$, ossia quelli cui corrisponde $k = 0$. Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$z = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\,\sqrt[10]{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\,\sqrt[10]{2}}.$$

(2) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x - \tan^2 x\right)\,\log(1+x^4)}{\cos x^2 + e^{\frac{x^4}{2}} - 2}.$$

Svolgimento

Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\sin^2 x \;=\; \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4);$$

$$\tan^2 x \;=\; \left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^2 \;=\; x^2 + \frac{2\,x^4}{3} + o(x^4);$$

$$\sin^2 x - \tan^2 x \;=\; -x^4 + o(x^4);$$
$$\log(1+x^4) \;=\; x^4 + o(x^4);$$

$$\cos x^2 \;=\; 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^8);$$

$$e^{\frac{x^4}{2}} \;=\; 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{8} + o(x^8);$$

$$\cos x^2 + e^{\frac{x^4}{2}} - 2 \;=\; \frac{1}{6}\,x^8 + o(x^8).$$

Sostituendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin^2 x - \tan^2 x\right)\,\log(1+x^4)}{\cos x^2 + e^{\frac{x^4}{2}} - 2} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{[x^4 + o(x^4)]\left[-x^4 + o(x^4)\right]}{\frac{1}{6}\,x^8 + o(x^8)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{-x^8 + o(x^8)}{\frac{1}{6}\,x^8 + o(x^8)} \;=\; -6.$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{x^2 - 4x} - 2x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è dato dall'insieme dei reali dove $x^2 - 4x \geq 0$ ossia $x \geq 4$ oppure $x \leq 0$. Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - 2\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 2\right) = +\infty.$$

Si osservi che questo in limite abbiamo applicato il fatto che $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$. Ricerca di eventuale asintoto obliquo per x che tende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} - x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = -1$$

Quindi l'equazione dell'asintoto per x che tende a $+\infty$ è

$$y = -x - 1.$$

Ricerca di eventuale asintoto obliquo per x che tende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -3.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} f(x) + 3x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} + x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x}+x)(\sqrt{x^2-2x}-x)}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x} = 1$$

Quindi l'equazione dell'asintoto per x che tende a $+\infty$ è

$$y = -3x + 1.$$

Calcolo della derivata prima e determinazione degli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} - 2.$$

Risulta

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x-2-2\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}} > 0$$

Da cui, tenuto conto del campo di esistenza di f segue che $f' < 0$ se $x < 0$, mentre per $x > 4$, $f'(x) > 0$ se

$$x - 2 > 2\sqrt{x^2-4x} \iff 3x^2 - 12x - 4 < 0$$

per $4 \le x < 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
Quindi f è decrescente in $(-\infty, 0]$ e in $(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, mentre cresce in $[4, 2+\frac{4\sqrt{3}}{3})$
Calcolo della derivata seconda per la determinazione degli intervalli di concavità e di convessità.

$$f''(x) = -\frac{4}{(x^2-4x)\sqrt{x^2-4x}} < 0,$$

per ogni x appartenente al campo di esistenza di f. Quindi f è concava per $x \le 0$ oppure per $x \ge 4$.
Possiamo tracciare il seguente grafico.

(4) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\,dx$$

Svolgimento

Risolviamo applicando la formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \;=\; [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Prendiamo $f'(x) = 1$ e quindi, ad esempio, $f(x) = x$, mentre $g(x) = \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)$, $a = 1$, $b = 2$. Quindi

$$\int_1^2 \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\, dx =$$

$$= \left[x\, \log\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)\, dx =$$

$$= 2\, \log(\sqrt{3} + 1) - \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx =$$

$$= 2\, \log(\sqrt{3} + 1) - \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2 - 1}\right]_1^2 = 2\, \log(\sqrt{3} + 1) - \log 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$