Analisi Matematica I - Corso di Laurea in Fisica

Prova scritta intermedia del 6 Giugno 2012

Risoluzione degli esercizi proposti

1) Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan(2x) - \arctan\frac{x}{2}$$
e tracciarne il grafico.

Svolgimento

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Limiti all'infinito:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

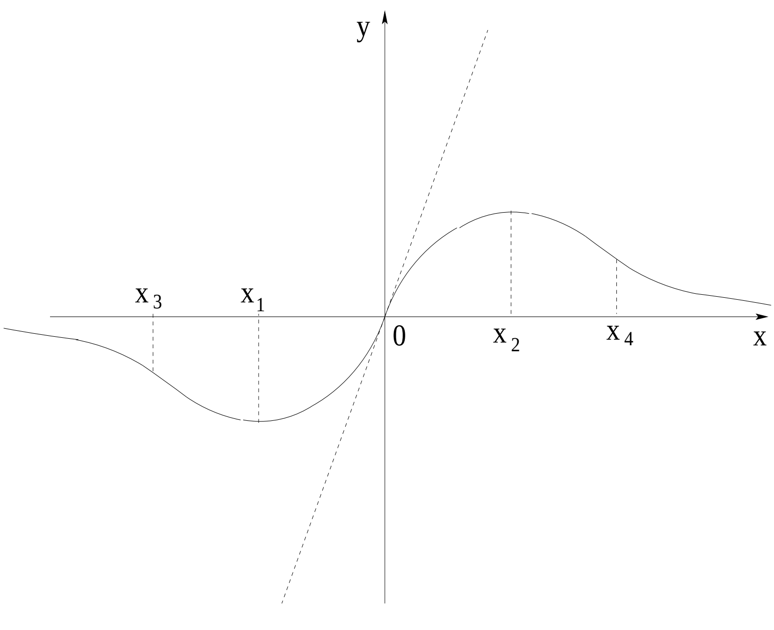
Determinazione degli intervalli di monotonia mediante la derivata prima.
$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{1+4x^2} = 6\frac{1-x^2}{(4+x^2)(1+4x^2)} =$$

Si vede facilmente che per ogni $x \in (-1,1)$ $f'(x) > 0$ e quindi f è crescente su questo intervallo, viceversa è decrescente su $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$. I punti $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ sono rispettivamente di minimo e di massimo relativo (in questo caso anche assoluti).

determinazione degli intervalli di covessità e di concavità mediante la derivata seconda.
$$f''(x) = 12x\frac{4x^2-8x-21}{(1+4x^2)^2(4+x^2)^2}.$$
Otteniamo che $f''(x) > 0$ per i valori di x che risolvono $x(4x^2-8x^2-21) > 0$, ovvero per
$$x \in \left(\sqrt{\frac{7}{2}},+\infty\right) \text{ e } x \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

In questo intervallo f risulta convessa, quindi nei complementari sarà concava. I punti $x_3 = -\frac{7}{2}$ e $x_4 = \frac{7}{2}$ e l'origine degli assi sono punti di flesso. La tangente al grafico in $(0,0)$ è la retta di equazione $y = \frac{6}{5}x$.

Possiamo tracciare il seguente grafico.



2) Calcolare

$$\int \frac{\log(\sqrt{1+3x}+1)}{x^2}\ dx.$$

Svolgimento.

Integriamo per parti:

$$\int \frac{\log(\sqrt{1+3x}+1)}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x}\ \log(\sqrt{1+3x}+1) + \int \frac{1}{\sqrt{1+3x}+1}\,\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\,\frac{1}{x}\ dx.$$

Risolviamo l'integrale ottenuto mediante il cambiamento di variabile $t = \sqrt{1+3x}$ e $dx = \frac{2}{3}t\,dt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}+1}\,\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\,\frac{1}{x}\ dx = \int \frac{3}{t-1}\,\frac{1}{(t+1)^2}\ dt.$$

Utilizziamo il metodo di Hermite per trasformare la funzione integranda.

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}\,\frac{C}{(t+1)^2} = \frac{(A+B)t^2 + (2A+C)t + A - B - C}{(t-1)(t+1)^2}.$$

Ci riportiamo al sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ A-B-C=1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{2}$. Quindi

$$\int \frac{3}{t-1}\,\frac{1}{(t+1)^2}\ dt = \frac{3}{4}\int \frac{1}{t-1}\ dt - \frac{3}{4}\int \frac{1}{t+1}\ dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}\ dt = \frac{3}{4}\log|t-1| - \frac{3}{4}\log|t+1| + \frac{3}{2t}$$

Tenendo conto delle posizioni fatte e sostituendo sopra otteniamo

$$\int \frac{\log(\sqrt{1+3x}+1)}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x}\ \log(\sqrt{1+3x}+1) + \frac{3}{4}\ \log\left|\frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+3x}+1}\right| + \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+3x}+1} + C.$$

3) Calcolare la derivata 54-esima della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x\ \cos x}{x}$$

Svolgimento.

Dalla eguaglianza $2\sin x\,\cos x = \sin 2x$ segue

$$\frac{\sin x\ \cos x}{x} = \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Utilizziamo la serie di Taylor della funzione *seno*

$$\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{2x}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\frac{1}{2x} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{(2x)^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{(2)^{2k}}{2k+1}\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

tenendo presente che lo sviluppo di Taylor di una generica funzione g, con punto iniziale $x=0$, è dato da

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g^k(0)\,\frac{(x)^k}{k!},$$

notiamo che nella serie la derivata k-esima di g in $x = 0$ è il coefficiente di $\frac{x^k}{k!}$, di conseguenza nella serie di f la derivata $2k$-esima in $x = 0$ è

$$(-1)^k \frac{(2)^{2k}}{2k+1}.$$

Per avere il valore di $f^{54}(0)$ basta prendere $k = 27$ e quindi

$$f^{54}(0) = -\frac{2^{54}}{55} = -\frac{18014398509481984}{55}.$$