ESERCIZI SULLE SERIE

1. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n n^2 + 2^n}$$

A questa serie applichiamo il *criterio del confronto*. Dovendo quindi dimostrare che la serie è convergente si tratterà di maggiorare il termine generale della serie data con il termine generale di una serie convergente. Osserviamo che vale la maggiorazione:

$$\frac{n^3+1}{3^n n^2 + 2^n} \leq \frac{n^4}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \; \forall n \in \mathbb{N},\; n > k^{1}$$

con $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Il termine generale della serie data è quindi maggiorato (definitivamente) dal termine generale della serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

che è una serie armonica con esponente $\alpha = 2$, quindi risulta convergente (le serie armoniche $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sono convergenti se $\alpha > 1$.)

Il *criterio del confronto* ci assicura quindi che anche la serie di partenza è convergente.

2. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^5}{4^n n + 3^n}$$

Applichiamo il *criterio della radice ennesima* : sia $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Quindi dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n^5}{4^n n + 3^n}}$$

[1] Come fa a venire in mente questa maggiorazione, direte voi. Basta osservare che il valore di una frazione aumenta se diminuisce il valore del denominatore (prima maggiorazione), mentre un esponenziale è definitivamente maggiore di qualunque potenza (seconda maggiorazione).

al numeratore della frazione sotto radice mettiamo in evidenza n^5, mentre al denominatore mettiamo in evidenza $4^n n$, cioè in entrambi i casi abbiamo messo in evidenza gli infiniti di ordine maggiore:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{4^n n}\frac{\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}{\left(1+\frac{3^n}{4^n n}\right)}} = \tag{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{4\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{3^n}{4^n n}}} = \frac{1}{4} \tag{2}$$

Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n^5}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{3^n}{4^n n}} = 1,$$

perchè: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n n} = 0$.
Concludendo, la serie data è convergente in quanto applicando al suo termine generale il *criterio della radice ennesima* otteniamo che il limite L risulta uguale a $\frac{1}{4}$ che è minore di uno.

3. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n^2}{2^n+n^2 5^n}$$

Applichiamo il *criterio del rapporto* : sia $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, se $L<1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Quindi dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(n+1)^2}{2^{n+1}+(n+1)^2 5^{n+1}}}{\frac{2+n^2}{2^n+n^2 5^n}}$$

Risolviamo il limite proposto mettendo in evidenza gli infiniti di ordine maggiore nella maniera seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 5^{n+1}}}{\frac{n^2}{n^2 5^n}} \frac{\frac{\frac{2}{(n+1)^2}+1}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}+1}}{\frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{2^n}{n^2 5^n}+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} \frac{\frac{\frac{2}{(n+1)^2}+1}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}+1}}{\frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{2^n}{n^2 5^n}+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \frac{\frac{\frac{2}{(n+1)^2}+1}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}+1}}{\frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{2^n}{n^2 5^n}+1}} = \frac{1}{5}$$

Perchè:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 5^n} = 0$$

Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

In quanto $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, essendo $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ se $\mid a \mid < 1$.

Concludendo, la serie data è convergente percè applicando al suo termine generale il *criterio del rapporto* otteniamo che il limite L risulta uguale a $\frac{1}{5}$ che è minore di uno.

4. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+n^4}{4^n + n^3 6^n}$$

Applichiamo il *criterio del limite*: sia

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ [2] , se $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ allora le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè la prima è convergente se e solo se lo è la seconda.

La difficoltà del percorrere questa strada sta nell'individuare una serie giusta con la quale confrontare la serie data.

Osserviamo che al denominatore del termine generale della serie che dobbiamo studiare l'infinito di ordine maggiore è $n^3 6^n$, mentre al numeratore è

[2] ovviamente deve essere $a_n \geq 0, b_n > 0$

ovviamente n^4. Di conseguenza, possiamo applicare il *criterio del limite,* considerando come a_n il termine generale della serie data e come

$$b_n = \frac{n^4}{n^3 6^n} = \frac{n}{6^n}.$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3+n^4}{4^n+n^3 6^n}}{\frac{n}{6^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+n^4}{4^n+n^3 6^n} \ \frac{6^n}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^4}+1}{\frac{4^n}{n^3 6^n}+1} \ \frac{n^4 6^n}{n^4 6^n} = 1$$

Perchè: $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^4} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n^3 6^n} = 0$
(infatti abbiamo già osservato in precedenza che l'esponenziale tende a zero se la base è in valore assoluto minore di uno:
$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$)

Il risultato del limite che abbiamo calcolato è $L = 1$ che è un numero reale non nullo , quindi la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{6^n}$$

Questa risulta convergente , ad esempio, per il *criterio della radice ennesima*:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{6^n}} = \frac{1}{6} < 1.$$

Di conseguenza, in virtù del *criterio del limite* sopra citato, anche la serie data risulta convergente.

5. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+x^{6n}}{n^4}.$$

Osserviamo che il limite della successione $\{x^{6n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dipende dal valore assunto da x, più precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} x^{6n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \mid x \mid > 1 \\ 1 & \text{se } x = \pm 1 \\ 0 & \text{se } \mid x \mid < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite del termine generale della serie nel caso in cui $|\, x \,| > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+x^{6n}}{n^4} = +\infty.$$

Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie (cioè il termine generale deve essere infinitesimo), quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge se $|\, x \,| > 1$.

Se $|\, x \,| \leq 1$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+x^{6n}}{n^4} = 0.$$

Il fatto che il termine generale della serie sia infinitesimo, come abbiamo osservato sopra è una condizione necessaria per la convergenza, ma non sufficiente. Ricorriamo quindi ad uno dei criteri elencati, ad esempio il *criterio del rapporto.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2+x^{6(n+1)}}{(n+1)^4}}{\frac{2+x^{6n}}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2+x^{6(n+1)}}{(n+1)^4} \frac{n^4}{2+x^{6n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+x^{6(n+1)}}{2+x^{6n}} \frac{n^4}{n^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^4} = 1.$$

Quando applicando il criterio del rapporto (ma anche quello della radice) il limite dà come risultato *1*, si devono utilizzare altri criteri. Infatti può succedere che la serie sia convergente come ad es.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, o divergente come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. In entrambi i casi se si applicano i criteri del rapporto o della radice si ottiene che il limite ha come risultato *1.* Osserviamo che anche il criterio della radice ennesima, applicato alla serie proposta, ha come risultato *1.* Infatti :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2+x^{6n}}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2+x^{6n}}}{\sqrt[n]{n^4}} = 1,$$

Perchè: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4} = 1$, mentre dalle maggiorazioni

$$1 < \sqrt[n]{2+x^{6n}} \leq \sqrt[n]{3},$$

si deduce che: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+x^{6n}} = 1$.

Dobbiamo quindi ricorrere ad un altro criterio, ad esempio quello del confronto:

$$\frac{2+x^{6n}}{n^4} \leq \frac{3}{n^4}$$

La serie che ha come termine generale $a_n = \frac{1}{n^4}$ è convergente, perchè, serie armonica con esponente $\alpha = 4 > 1$. Quindi anche la serie data risulta convergente quando $|\, x \,| \leq 1$.

6. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+x^{8n}}{n^5}.$$

Osserviamo che il limite della successione $\{x^{8n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dipende dal valore assunto da x, più precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} x^{8n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \mid x \mid > 1 \\ 1 & \text{se } x = \pm 1 \\ 0 & \text{se } \mid x \mid < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite del termine generale della serie nel caso in cui $\mid x \mid > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+x^{8n}}{n^5} = +\infty.$$

Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie (cioè il termine generale deve essere infinitesimo), quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge se $\mid x \mid > 1$.

Se $\mid x \mid \leq 1$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+x^{8n}}{n^5} = 0.$$

Il fatto che il termine generale della serie sia infinitesimo, come abbiamo osservato sopra è una condizione necessaria per la convergenza, ma non sufficiente. Ricorriamo quindi ad uno dei criteri elencati, ad esempio il *criterio del confronto.*

Poichè $\mid x \mid \leq 1$ possiamo maggiorare il termine generale della serie data nel modo che segue:

$$\frac{3+x^n}{n^5} \leq \frac{3+1}{n^5}$$

Consideriamo la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^5} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}.$$

Questa è una serie armonica con esponente $\alpha = 5 > 1$, quindi è convergente. Per il *criterio del confronto* anche la serie data é convergente.

7. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}+5}{n^2}.$$

Ragionando come negli esercizi precedenti si stabilisce che, se $\mid x \mid > 1$, la serie data è divergente. Consideriamo allora il caso in cui $\mid x \mid \leq 1$. Applichiamo il *criterio del limite* prendendo come serie test: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^{4n}+5}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} x^{4n} + 5 = \begin{cases} 6 & \text{se } x = \pm 1 \\ 5 & \text{se } \mid x \mid < 1 \end{cases}$$

Da cui si deduce che la serie proposta è convergente, perchè ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente, in quanto serie armonica con esponente $\alpha = 2 > 1$.

8. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}+1}{n^3}.$$

Ragionando come negli esercizi precedenti si dimostra che, se $|\, x \,| > 1$, la serie è divergente. Se invece $|\, x \,| \leq 1$, utilizzando il *criterio del confronto* o il *criterio del limite,* si dimostra che la serie è convergente.

Altri esercizi sulle serie.

Studiare la natura delle seguenti serie. [3]

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n^4}{n^2+1}; \quad \mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \ \sin \frac{1}{3^n}; \quad \mathbf{3)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} \quad \mathbf{4)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$\mathbf{5)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ \frac{2^n+n}{3^n+n^2} \quad \mathbf{6)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ \frac{2+n}{1+n+n^2} \quad \mathbf{7)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2$$

$$\mathbf{8)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \quad \mathbf{9)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n!}{n^3} \quad \mathbf{10)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n!}}$$

Studiare al variare di x in $\mathbb{R}$ la natura delle seguenti serie:

$$\mathbf{11)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\, 2^n} \quad \mathbf{12)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^x \ x^n$$

[3] I risultati e le soluzioni sono nelle pagine successive.

RISPOSTE
CONVERGENTI: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10
DIVERGENTI: 4, 8
ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI: 1, 3, 5

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI 1) La serie data non è a termini di segno costante perchè $\cos n^4$ cambia di segno al variare di n. Consideriamo allora la seguente serie:

$$*) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n^4}{n^2+1} \right|$$

Osserviamo che valgono le maggiorazioni:

$$\left| \frac{\cos n^4}{n^2+1} \right| < \frac{1}{n^2}$$

(perché: $|\cos n^4| \leq 1$ mentre $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$.) Dal teorema del confronto per le serie, otteniamo che *) converge, dunque la serie di partenza è convergente assolutamente, perció convergente, per il criterio della convergenza assoluta.

2) Si tratta di una serie a termini di segno costante, infatti $0 < \frac{1}{3^n} < \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, per cui $\sin \frac{1}{3^n} > 0$. Vale anche $\sin \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n}$, (per la maggiorazione $|\sin x| \leq |x|$, con $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.) Possiamo dunque applicare il criterio del cofronto per le serie a termini di segno costante maggiorando la serie data nel modo che segue:

$$2^n \ \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Osserviamo che $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è il termine generale della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ di ragione $x = \left(\frac{2}{3}\right) < 1$, che come è noto converge. Quindi, per il criterio del confronto la serie data converge.

3) Si tratta di una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{(2n+2)}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (2n+1)(2n+2) \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} =$$

$$= 4 \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \right]^2 = 4 \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 = \frac{4}{e^2} < 1.$$

Quindi la serie risulta convergente.

4) Osserviamo che il termine generale della serie non è infinitesimo, non è dunque verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie. Poiché si tratta di serie a termini positivi questa divergerà a $+\infty$. Verifichiamo dunque che il termine generale non tende a zero:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{-1} = \frac{1}{e}$$

Perché se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ allora:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

5) Si tratta di una serie a termini di segno alterno, (serie alterna) possiamo applicare il criterio di convergenza relativo a questo tipo di serie deducendone la sua convergenza, infatti si verifica che:
i)la successione $a_n = \frac{2^n+n}{3^n+n^2}$ è decrescente
ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
La verifica di i) è semplice. Dimostriamo ii):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n}{3^n+n^2} == \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3^n}\frac{1+\frac{n}{2^n}}{1+\frac{n^2}{3^n}} = 0$$

Perché: $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3^n} = 0$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3^n} = 0$.

Possiamo arrivare a dimostrare che la serie converge anche utilizzando il criterio della convergenza assoluta, infatti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{2^n+n}{3^n+n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n}{3^n+n^2}$$

Si dimostra che quest'ultima converge, utilizzando il criterio della radice ennesima, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+n}{3^n+n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1+\frac{n}{2^n}}{1+\frac{n^2}{3^n}}} = \frac{2}{3} < 1$$

(Il termine sotto la radice ennesima tende a 1).

6) Si dimostra facilmente che la serie è convergente applicando il criterio delle serie alterne, infatti:
a) la successione $a_n = \frac{2+n}{1+n+n^2}$ è decrescente;
b)$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+n}{1+n+n^2} = 0$, perché:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+n}{1+n+n^2} == \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{2}{n}+1\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

7) Possiamo dimostrare che la serie converge applicando il criterio del confronto perchè si tratta di una serie a termini positivi. A tale scopo utilizziamo la maggiorazione: $\log x < x$, in questo modo:

$$\log n = \log(\sqrt[4]{n})^4 = 4\log\sqrt[4]{n} < 4\sqrt[4]{n} \quad (\text{dove } x = \sqrt[4]{n}).$$

Applichiamo questo risultato per maggiorare il termine generale della serie data:

$$\left(\frac{\log n}{n}\right)^2 < \left(\frac{4\sqrt[4]{n}}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{16\sqrt{n}}{n^2} = \frac{16}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La successione $a_n = \frac{16}{n^{\frac{3}{2}}}$ è il termine generale di una serie armonica con esponente $p = \frac{3}{2} > 1$, che risulta dunque convergente.

8) La serie è divergente perché è a termini positivi ed il termine generale non tende a zero, cioé non è verificata la condizione necessaria per la convergenza di una serie, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} == \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} = e^2.$$

(per l'ultimo passaggio vedi lo svolgimento dell'esercizio N. 4).

9) I termini della serie data sono non negativi. Possiamo applicare il critrio del confronto, utilizzando la maggiorazione $n! \leq n^n$, e la proprietá di monotonia della funzione logaritmo: $x_1 < x_2 \Rightarrow \log x_1 < \log x_2$, [4] otteniamo:

$$\frac{\log n!}{n^3} \leq \frac{\log n^n}{n^3} = \frac{n\log n}{n^3} =$$

(vedi esercizio N. 7)

$$= \frac{n\log(\sqrt{n})^2}{n^3} \leq \frac{2n\sqrt{n}}{n^3} = 2\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La successione: $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è il termine generale di una serie armonica con $p = \frac{3}{2} > 1$, che quindi è convergente.

10) La serie è a termini positivi, si utilizza il criterio del confronto. Ricordiamo la diseguaglianza: $n^n \leq (n!)^2$, che equivale alla seguente:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Quindi

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

[4] ricordiamo che i logaritmi che consideriamo sono in base e: $\log = \log_e$

Si conclude nello stesso modo dell'esercizio N. 9.

11) Determiniamo per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge assolutamente, cioé studiamo la natura della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n\,2^n}$$

Questa è a termini positivi, possiamo applicare il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n\,2^n}} = \frac{|x|}{2}$$

La serie converge assolutamente, quindi converge (criterio della convergenza assoluta) per i valori di x tali che $\frac{|x|}{2} < 1$, ossia: $|x| < 2$. Consideriamo ora i valori del parametro $x \geq 2$.

$x = 2$

La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,2^n} \quad = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che è una serie armonica divergente ($p = 1$).

$x > 2$

In questo caso si tratta di una serie a termini positivi con il termine generale che non tende a zero. Quindi la serie risulta divergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n\,2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} = +\infty$$

(ricordare il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$, per $a > 1$.

$x = -2$

La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Converge per il criterio delle serie alterne perchè $a_n = \frac{1}{n}$, risulta decrescente e infinitesima.

$x < -2$

Poiché $x < 0$ possiamo scrivere (per definizione di valore assoluto): $x = -|x|$, dunque :$x^n = (-|x|)^n = (-1|x|^n) = (-1)^n|x|^n$. Sostituendo nella serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,|x|^n}{n\,2^n}$$

In questo caso il termine generale non è infinitesimo (vedi sopra), poiché la serie è a termini di segno alterno, possiamo concludere che è indeterminata.

12) Determiniamo per quali valori del parametro reale x la serie converge assolutamente, cioé consideriamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \, |x|^n.$$

Applichiamo il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{n^x \, |x|^n} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{n^x} \, |x| = |x|$$

Per i valori di x tali che $|x| < 1$ la serie risulta assolutamente convergente e dunque convergente. Consideriamo i valori di x tali che: $|x| > 1$.

$x = 1$

La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n = +\infty.$$

Perché è a termini positivi ed il termine generale non è infinitesimo. Stesso discorso nel caso seguente:

$x > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} n^x \, x^n = +\infty$$

$x = -1$

Allora:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{1}{n}$$

Converge per il criterio delle serie alternate.

$x < -1$

Ragionando come nell'esercizio precedente: $x < 0$ implica $x = -|x|$. Sostituendo nell'espressione della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-|x|} \, (-|x|)^n == \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{1}{n^{|x|}} |x|^n$$

La serie ottenuta ha i termini a segno alterno, ma non tendono a zero, dunque risulta indeterminata (vedi anche esercizio precedente).