ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 17/12/2007 - FILA 1

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{(2\,\sin x\,-\,\sqrt{2})\,\sqrt{2\,\sin x\,-\,\sqrt{2}}}{\sin x\,-\,\sqrt{3}\,\cos x\,-\,\sqrt{3}}\;\geq\;0.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\;\frac{\log\sqrt{1-\tan x}}{1\,-\,e^{\sqrt[3]{x^3-x^4}}}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & \dfrac{1}{2} \\[2ex] a_{n+1} & = & \dfrac{1\,+\,a_n^2}{1\,+\,a_n}. \end{cases}$$

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^2\,-\,|\overline{z}\,-\,3|\,-\,3\,=\,0.$$

ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 17/12/2007 - FILA 2

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\sqrt{3}\cos x + 3\sin x - \sqrt{3}}{(2\sin x - 1)\sqrt{2\sin x - 1}} < 0.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1 + x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \sqrt[4]{1 + a_n} - 1. \end{cases}$$

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$\overline{z}^{\,3} z^4 = -2 z^2.$$

ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 17/12/2007 - FILA 3

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{(2\cos x + \sqrt{3})\sqrt{2\cos x + \sqrt{3}}}{3\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}} \geq 0.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x) + \sin^3 x}{e^{-x^2} - 1}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & 1 - \dfrac{1}{2 + a_n}. \end{cases}$$

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z + 2| = \overline{z}^{\,2} - 1.$$

ANALISI MATEMATICA

CORSI A - B - R - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 17/12/2007 - FILA 4

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\sqrt{3} - \sin x - \sqrt{3} \cos x}{(\sqrt{2} \cos x - 1) \sqrt{\sqrt{2} \cos x - 1}} < 0.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \sin^2 3x)^{\frac{1}{\tan x^2}}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 6 \\ a_{n+1} & = & \sqrt{4 a_n + 6}. \end{cases}$$

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^4 \, \overline{z}^{\,2} = -16 \, \overline{z}^{\,2}.$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI PROPOSTI - FILA 1

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{(2\,\sin x\,-\,\sqrt{2})\,\sqrt{2\,\sin x\,-\,\sqrt{2}}}{\sin x\,-\,\sqrt{3}\,\cos x\,-\,\sqrt{3}}\,\geq\,0.$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\,\sin x\,-\,\sqrt{2}\geq 0 \\ \sin x\,-\,\sqrt{3}\,\cos x\,-\,\sqrt{3}\,>\,0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x\,=\,\frac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}},\qquad \cos x\,=\,\frac{1\,-\,\tan^2\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \sin x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}}\,-\,\sqrt{3}\,\dfrac{1\,-\,\tan^2\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}}\,-\,\sqrt{3}\,>\,0 \end{cases}$$

Ponendo $t=\tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente $t\,-\,\sqrt{3}\,>\,0$, tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \sin x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan\dfrac{x}{2}\,>\,\sqrt{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+k\,2\pi\,\leq\,x\,\leq\,\dfrac{3}{4}\pi\,+\,k\,2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi}{3}\,+\,h\,\pi\,<\,\dfrac{x}{2}\,<\,\dfrac{\pi}{2}\,+\,h\,\pi, & h\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$\frac{2}{3}\,\pi\,+\,k\,2\pi\,<\,x\,\leq\,\frac{3}{4}\pi\,+\,k\,2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{1-\tan x}}{1\,-\,e^{\sqrt[3]{x^3-x^4}}}.$$

Svolgimento
Possimo utilizzare lo sviluppo della funzione *logaritmo:* $\log(1+t) = t + o(t)$ tenendo presente che per $x\to 0$, $\tan x \to 0$. Poniamo quindi $t = \tan x$ otteniamo

$$\log\sqrt{1\,-\,\tan x} = \frac{1}{2}\log(1\,-\,\tan x) = -\frac{1}{2}\tan x + o(\tan x)$$

inoltre $\tan x = x + o(x)$, sostituiamo sopra:

$$\log\sqrt{1-\tan} = -\frac{1}{2}x + o(x) + o[x+o(x)] = -\frac{1}{2}x + o(x).$$

Perchè $o[x+o(x)] = o(x)$ e $o(x)+o(x) = o(x)$.
Consideriamo lo sviluppo della funzione *esponenziale*: $e^t = 1 + t + o(t)$ ed osserviamo che il termine $\sqrt[3]{x^3-x^4}$ tende a zero per x che tende a zero. Poniamo quindi $t = \sqrt{x^3-x^4}$

$$e^{\sqrt[3]{x^3-x^4}} = 1 + \sqrt[3]{x^3-x^4} + o(\sqrt[3]{x^3-x^4})$$

Sostituiamo le relazioni così trovate nel limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x + o(x)}{-\sqrt[3]{x^3-x^4} + o(\sqrt[3]{x^3-x^4})} = \quad \text{(principio di sostituzione degli infinitesimi)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x}{-x\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & \dfrac{1}{2} \\[2ex] a_{n+1} & = & \dfrac{1\,+\,a_n^2}{1\,+\,a_n}. \end{cases}$$

Svolgimento

Si vede facilmente che per ogni $n\in\mathbb{N}$ $a_n > 0$. Infatti per induzione: $a_1 > 0$ e dal fatto che $a_n > 0$ segue $a_{n+1} > 0$. Quindi la successione è ben definita. Dimostriamo che è monotona crescente.

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{1+a_n} > a_n \iff 1+a_n^2 > a_n + a_n^2$$

che equivale a $a_n < 1$. Dimostriamo quasta diseguaglianza per induzione:
$a_1 = \dfrac{1}{2} < 1$
$a_n < 1 \Longrightarrow a_{n+1} = \dfrac{1+a_n^2}{1+a_n} < 1,$
che è verificata perchè equivale a $a_n < 1$ (sopra abbiamo dimostrato che $a_n > 0$).

La successione risulta di conseguenza monotona crescente e limitata superiormente. Per il teorema di regolarità delle successioni monotone ammette limite reale L. Tale valore risolve l'equazione che si ottiene passando al limite nella formula che definisce la successione:

$$L = \frac{1+L^2}{1+L}.$$

Risolvendo si ha $L = 1$.

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^2 \, - \, |\overline{z} \, - \, 3| \, - \, 3 \, = \, 0.$$

Svolgimento

Per risolvere l'equazione poniamo:$z = x + iy$. Sostituendo si ha

$$(x+iy)^2 - |x - iy - 3| - 3 = 0 \iff x^2 - y^2 + 2xyi - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 3 = 0 \tag{1}$$

Tenendo presente che un numero complesso è zero se e solo se sono zero la sua parte reale e la sua parte immaginaria, da (1) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 3 = 0 \\ \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Da questo otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ \\ -y^2 - \sqrt{9 + y^2} - 3 = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \\ x^2 - \sqrt{(x-3)^2} - 3 = 0 \end{cases} .$$

Ovvero

$$\begin{cases} x = 0 \\ \\ y^2 + 3 = -\sqrt{9 + y^2} \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \\ x^2 - |x-3| - 3 = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo sistema equivale ai seguenti

$$\begin{cases} y = 0 \\ \\ x - 3 \geq 0 \\ \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \\ x - 3 < 0 \\ \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema non ha soluzioni mentre il secondo ha $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
La soluzione dell'equazione data è:

$$z_1 = -3, \quad z_2 = 2.$$

SVOLGIMENTO ESERCIZI PROPOSTI - FILA 2

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\sqrt{3}\cos x \,+\, 3\sin x \,-\, \sqrt{3}}{(2\sin x \,-\, 1)\,\sqrt{2\sin x \,-\, 1}} \,<\, 0.$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\sin x \,-\, 1 > 0 \\ \\ \sqrt{3}\cos x \,+\, 3\sin x \,-\, \sqrt{3} \,<\, 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x \,=\, \frac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x \,=\, \frac{1 \,-\, \tan^2\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \sin x \,>\, \dfrac{1}{2} \\ \\ \sqrt{3}\,\dfrac{1 \,-\, \tan^2\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}} \,+\, \dfrac{6\,\tan\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3} \,<\, 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente
$\sqrt{3}\,t^2 \,-\, 3\,t \,>\, 0$, ovvero $t < 0 \vee t > \sqrt{3}$ tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \sin x \,>\, \dfrac{1}{2} \\ \\ \tan\dfrac{x}{2} < 0 \quad\vee\quad \tan\dfrac{x}{2} \,>\, \sqrt{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,<\, x \,<\, \dfrac{5}{6}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < \dfrac{x}{2} < 0 + h\,\pi \;\vee\; \dfrac{\pi}{3} + k\pi < \dfrac{x}{2} \,<\, \dfrac{\pi}{2} \,+\, h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$\frac{2}{3}\pi + k\,2\pi \,<\, x \,<\, \frac{5}{6}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\;\frac{\log^2(1+x) \,+\, \sin^3 x}{e^{-x^2} \,-\, 1}.$$

Svolgimento
Consideriamo lo sviluppo della funzione *logaritmo:* $\log(1+x) = x + o(x)$ ed eleviamo al quadrato: $\log^2(1+x) = x^2 + 2x\,o(x) + [o(x)]^2 = x^2 + o(x^2)$.
Perché: $2xo(x) = o(x^2)$, $[o(x)]^2 = o(x^2)$ e $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.
Ragionando in maniera analoga si ha:
$(\sin x)^3 = x^3 + o(x^3)$ mentre, se nello sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ poniamo $t = -x^2$ otteniamo
$e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$
Sostituiamo nel limite assegnato

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2) + x^3 + o(x^3)}{1 - x^2 + o(x^2) - 1} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

(Si tenga presente che $o(x^2) + x^3 + o(x^3) = o(x^2)$)

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 3 \\ a_{n+1} & = & \sqrt[4]{1+a_n} - 1. \end{cases}$$

Svolgimento

Osserviamo che la successione è ben definita perché per ogni $n \in N$ risulta $a_n > 0$. Infatti, procedendo per induzione, $a_1 > 0$, inoltre, per ogni n, se $a_n > 0$ allora $a_{n+1} > 0$ perché $\sqrt[4]{1+a_n} > 1$. Questa osservazione permette anche di dire che la successione data è limitata inferiormente. Dimostriamo ora per induzione che è monotona decrescente.

$a_1 < a_2$ perché $a_2 = \sqrt[4]{4} - 1 < 3 = a_1$.

Si dimostra facilmente che $a_{n+1} < a_n$ come conseguenza di $a_n < a_{n-1}$ perché basta semplificare l'espressione $\sqrt[4]{1+a_n} - 1 < \sqrt[4]{1+a_{n-1}} - 1$.
Essendo quindi monotona decrescente e limitata inferiormente, la successione ammette limite reale L. Il valore di L si deduce dall'equazione:

$$L = \sqrt[4]{1+L} - 1.$$

Risolvendo otteniamo come unici valori reali: $L_1 = -1$ e $L = 0$. Il valore $L = -1$ si scarta perchè, come abbiamo visto sopra $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Quindi la successione data ammette limite $L = 0$.

Osserviamo che la successione poteva essere espressa esplicitamente in funzione di n. Infatti si dimostra facilmente, per induzione che

$$a_n = 4^{\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)} - 1.$$

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$\overline{z}^{\,3}\, z^4 = -2\, z^2.$$

Svolgimento.

Osserviamo che una soluzione è $z = 0$. Cerchiamo le soluzioni $z \neq 0$. Possiamo dividere per z^2 ed otteniamo

$$\overline{z}^{\,3}\, z^2 = -2$$

Eguagliamo il modulo del primo membro a quello del secondo: $|z|^5 = 2$ onde $|z| = \sqrt[5]{2}$. Tenuto conto di questo e scomponendo l'espressione dell'equazione data:

$$\overline{z}^{\,2}\ z^2\ \overline{2} = -2 \Longrightarrow |z|^4\ \overline{z} = -2 \iff \overline{z} = -\frac{2}{(\sqrt[5]{2})^4} = -\sqrt[5]{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono dunque $z_1 = 0$ e $z_2 = -\sqrt[5]{2}$.

SVOLGIMENTO ESERCIZI PROPOSTI - FILA 3

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{(2\cos x + \sqrt{3})\ \sqrt{2\cos x + \sqrt{3}}}{3\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}} \geq 0.$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3} \geq 0 \\ \\ 3\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} > 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \cos x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \dfrac{6\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} - \sqrt{3}\ \dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} - \sqrt{3} > 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente
$3t - \sqrt{3} > 0$, tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \cos x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \tan\dfrac{x}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} 0 + k\,2\pi \leq x \leq \dfrac{5}{6}\pi + k\,2\pi \quad \vee \quad 2\pi + k\,2\pi \leq x \leq \dfrac{7}{6}\pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ \dfrac{\pi}{6} + h\,\pi < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2} + h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$\frac{\pi}{3} + k\,2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\ (\sqrt{1\,+\,x^2})^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Svolgimento

La funzione del limite proposto può essere trasformata nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0}\ (\sqrt{1\,+\,x^2})^{\frac{1}{\sin^2 x}}\ =\ \lim_{x\to 0}\ e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ \log\sqrt{1+x^2}}$$

È sufficiente considerare l'esponente di e calcolandone il limite:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{1}{\sin^2 x}\ \log\sqrt{1+x^2}\ =\lim_{x\to 0}\ \frac{1}{2\ \sin^2 x}\ \log(1+x^2)$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione consideriamo gli sviluppi delle funzioni che compaiono nell'espressione: $\log(1+t)\ =\ t\ =\ o(t)$ poniamo $t\,=\,x^2$, ottenendo $\log(1+x^2)\ =\ x^2\ +\ o(x^2)$. Mentre da $\sin x\ =\ x\ +\ o(x)$ elevando al quadrato:
$\sin^2 x\ =\ x^2\ +\ 2\,x\,o(x^2)\ +\ [o(x)]^2\ =\ x^2\ +\ o(x^2)$. Perché: $2\,x\,o(x)\ =\ o(x^2)$, $[o(x)]^2 = o(x^2)$ e $o(x^2)+o(x^2) = o(x^2)$. Sostituiamo sopra:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{x^2\ +\ o(x^2)}{2\,x^2\ +\ o(x^2)}\ =\ \text{(Principio di sostituzione degli infinitesimi)}$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{x^2}{2\ x^2}\ =\ \frac{1}{2}.$$

In definitica il valore del limite proposto nell'esercizio è $e^{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 0 \\ & & \\ a_{n+1} & = & 1\,-\,\dfrac{1}{2\,+\,a_n}. \end{cases}$$

Svolgimento.

Si vede facilmente per induzione che la successione data è ben definita perché per ogni $n \in N$ risulta $a_n > 0$, e quindi il denominatore della frazione non si annulla mai.
Per induzione verifichiamo che è monotona crescente:

$$a_1 = 0 < \frac{1}{2} = a_2.$$

Deduciamo poi che $a_n < a_{n+1}$ da $a_{n-1} < a_n$ semplificando l'espressione

$$1\,-\,\frac{1}{2\,+\,a_{n-1}}\ <\ 1\,-\,\frac{1}{2\,+\,a_n}.$$

La successione è limitata superiormente in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1\,-\,\frac{1}{2\,+\,a_n} < 1.$$

La successione ammette quindi limite reale L che si determina risolvendo l'equazione

$$L \;=\; 1 - \frac{1}{2\,+\,L} \qquad \text{ovvero} \qquad L^2 + L - 1 = 0$$

Le soluzioni sono $L_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $L_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. L_1 si scarta perché negativa mentre i valori assunti dalla successione sono tutti positivi. In definitiva il limite della successione assegnata è $L = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z\,+\,2| \,=\, \overline{z}^{\;2} \,-\, 1.$$

Svolgimento
Per risolvere l'equazione poniamo:$z = x + iy$. Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} |x+iy+2| = (x-iy)^2 - 1 \iff & \sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2 - y^2 - 2xyi - 1 \\ \iff & \sqrt{(x+2)^2+y^2} + 1 - x^2 + y^2 + 2xyi = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Tenendo presente che un numero complesso è zero se e solo se sono zero la sua parte reale e la sua parte immaginaria, da (2) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2 - y^2 - 1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Da questo otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{4+y^2} = -y^2 - 1 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} y = 0 \\ |x+2| = x^2 - 1 \end{cases}.$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo sistema equivale ai seguenti

$$\begin{cases} y = 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+2 = x^2 - 1 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x+2 < 0 \\ x^2 - 1 = -x - 2 \end{cases}.$$

Il secondo sistema non ha soluzioni mentre il primo ha $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
La soluzione dell'equazione data è:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

SVOLGIMENTO ESERCIZI PROPOSTI - FILA 4

Esercizio 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\sqrt{3} \,-\, \sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x}{(\sqrt{2}\,\cos x \,-\, 1)\;\sqrt{\sqrt{2}\,\cos x \,-\, 1}} \;<\; 0.$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - 1 > 0 \\ \\ \sqrt{3} - \sin x - \sqrt{3}\cos x < 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \cos > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sqrt{3} - \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} - \sqrt{3}\,\dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} < 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente
$\sqrt{3}\,t^2 - t < 0$, ovvero $0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ 0 < \tan\dfrac{x}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \le x < \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ 0 + h\,\pi < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{6} + h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$0 + k\,2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} (1 - \sin^2 3\,x)^{\frac{1}{\tan x^2}}.$$

Svolgimento

La funzione del limite proposto può essere trasformata nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0} (1 - \sin^2 3\,x)^{\frac{1}{\tan x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\tan x^2}\,\log(1-\sin^2 3x)}$$

È sufficiente considerare l'esponente di e calcolandone il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x^2} \log(1 - \sin^2 3x)$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione consideriamo gli sviluppi delle funzioni che compaiono nell'espressione: $\log(1+t) = t = o(t)$ poniamo $t = -\sin^2 3x$, ottenendo $\log(1-\sin^2 3x) = -\sin^2 3x + o(\sin^2 3x)$. Quindi da $\sin t = t + o(t)$ ponendo $t = 3x$ ed elevando al quadrato: $\sin^2 3x = [3x + o(3x)]^2 = 9x^2 + 6\,x\,o(3x) + [o(3x)]^2 = 9\,x^2 + o(x^2)$.
Perché: $6\,x\,o(3x) = o(x^2)$, $[o(3x)]^2 = o(x^2)$ e $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.
Sostituiamo sopra:
$\log(1-\sin^2 3x) = -9\,x^2 + o(x^2) + o[-9x^2 + o(x^2)] = -9\,x^2 + o(x^2)$.
Perchè $o[-9x^2 + o(x^2)] = o(x^2)$.
Infine da $\tan t = t + o(t)$ prendendo $t = x^2$ si ha $\tan x^2 = x^2 + o(x^2)$. Sostituiamo nel limite sopra

$$\lim_{x\to 0} \frac{-9\,x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \text{(Principio di sostituzione degli infinitesimi)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-9\,x^2}{x^2} = -9.$$

In definitiva il valore del limite proposto nell'esercizio è e^{-9}.

Esercizio 3. (Punti 8)

Studiare l'andamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 6 \\ \\ a_{n+1} & = & \sqrt{4\,a_n + 6}. \end{cases}$$

Svolgimento

Osserviamo che la successione è ben definita perché per ogni $n \in N$ risulta $a_n > 0$. Infatti, procedendo per induzione, $a_1 > 0$, inoltre, per ogni n, se $a_n > 0$ allora $a_{n+1} > 0$ perché la radice quadrata aritmetica è sempre non negativa.
Questa osservazione permette anche di dire che la successione data è limitata inferiormente. Dimostriamo ora per induzione che è monotona decrescente.

$a_2 < a_1$ perché $a_2 = \sqrt{30} < 6 = a_1$.

Si dimostra facilmente che $a_{n+1} < a_n$ come conseguenza di $a_n < a_{n-1}$ perché basta semplificare l'espressione $\sqrt{4a_n + 6} < \sqrt{4a_{n-1} + 6}$.
Essendo quindi monotona decrescente e limitata inferiormente, la successione ammette limite reale L. Il valore di L si deduce dall'equazione:

$$L = \sqrt{4L + 6}.$$

Risolvendo otteniamo come unici valori reali: $L_1 = 2 - \sqrt{10}$ e $L = 2 + \sqrt{10}$. Il valore $L = 2 - \sqrt{10}$ si scarta perchè, come abbiamo visto sopra $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Quindi la successione data ammette limite $L = 2 + \sqrt{10}$.

Esercizio 4. (Punti 8)
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^4\,\overline{z}^{\,2} = -16\,\overline{z}^{\,2}.$$

Svolgimento

Osserviamo che $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo le soluzioni $z \neq 0$. Dividendo per $\overline{z}$ entrambi i membri dell'equazione

$$z^4 \ = -16 \iff z \in \sqrt[4]{-16}$$

Scriviamo in forma trigonometrica -16 ed applichiamo la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso ottenendo le altre soluzioni dell' equazione data

$$-16 = 16\{\cos\pi + i\sin\pi\}$$

$$z \in \left\{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2, 3\right\}.$$

Onde

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ \ z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ \ z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},\ z_4 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$