# ANALISI MATEMATICA

(CORSO D - CdL INFORMATICA)

Prova scritta del 25/5/2004

**(1)** Calcolare, mediante il polinomio di Taylor, il valore del limite:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{2x - \sin 2x}{e^{x^3} - \cos \sqrt{x^3}}$$

**(2)** Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{|x| + 1}$$

**(a)** Determinare il dominio di $f$ e stabilire se esistono asintoti.
**(b)** Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
**(c)** Determinare gli intervalli dove $f$ risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
**(d)** Tracciare un grafico approssimato di $f$.

**(3)** Data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x - 3}}$$

**(a)** Dire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio sull'intervallo $(3, 4]$.
**(b)** Determinare il valore del seguente integrale:

$$\int_3^4 \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x - 3}} \, dx.$$

**(4)** Data:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n} + 3}.$$

dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie risulta *assolutamente convergente* e per quali valori risulta *convergente*.

**Risoluzione degli esercizi proposti**

**(1)** Calcolare, mediante il polinomio di Taylor, il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x\ -\ \sin\ 2x}{e^{x^3}\ -\ \cos\sqrt{x^3}}$$

**Svolgimento**

Consideriamo gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $x_0 = 0$, realtivi alle funzioni che compaiono nel limite:

$\sin y = y - \dfrac{y^3}{6} + o(y^3)$, per $y = 2x$ diventa $\sin 2x = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$;

$e^y = 1 + y + o(y)$ per $y = x^3$ diventa $e^{x^3} = 1 + x^3 + o(x^3)$.

$\cos y = 1 - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y = \sqrt{x^3}$ diventa $\cos\sqrt{x^3} = 1 - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$

Sostituiamo questi sviluppi nel limite ottenendo:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x - (2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3))}{1 + x^3 + o(x^3) - (1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3))} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{4}{3}x^3}{\frac{3}{2}x^3} = \frac{8}{9}$$

**(2)** Si consideri la funzione:

$$f(x)\ =\ \frac{x^2\ -\ 4x\ +\ 2}{|x|\ +\ 1}$$

**(a)** Determinare il dominio di $f$ e stabilire se esistono asintoti.
**(b)** Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
**(c)** Determinare gli intervalli dove $f$ risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
**(d)** Tracciare un grafico approssimato di $f$.

**Svolgimento**

Il dominio di $f$ è $\mathbb{R}$ in quanto la funzione è costituita dal rapporto di due polinomi, ed il denominatore non si annulla mai ($|x| + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$ )

La funzione si può anche scrivere nella forma seguente esplicitando al denominatore $|x|$ :

$$f(x)\ =\ \frac{x^2 - 4x + 2}{|x| + 1}\ =\ \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x + 1}, & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 4x + 2}{-x + 1}, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Determiniamo il comportamento di $f$ agli estremi del suo dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\ =\ +\infty$$

Esaminiamo la possibilità dell'esistenza di asintoti.

$1^0$ asintoto per $x \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+2}{x(x+1)} = 1 \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+2}{x+1} - x = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+2}{x+1} = -5
\end{aligned}$$

Asintoto per $x \to +\infty$ :

$$\varphi_1(x) = x - 5$$

$2^0$ asintoto per $x \to -\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+2}{x(-x+1)} = -1 \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) + x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+2}{-x+1} + x = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+2}{-x+1} = 3.
\end{aligned}$$

Asintoto per $x \to -\infty$ :

$$\varphi_2(x) = x + 3$$

Studio della derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x-4)(x+1)-(x^2-4x+2)}{(x+1)^2}, & x > 0 \\[2ex] \dfrac{(2x-4)(-x+1)}{(-x+1)^2}, & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

ovvero

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-6}{(x+1)^2}, & x > 0 \\[2ex] \dfrac{-x^2+2x-2}{(-x+1)^2}, & x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Zeri della derivata prima per $x > 0$ :

$$x^2 - 2x - 6 = 0 \Rightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}.$$

Il polinomio $x^2 - 2x - 6 > 0$ per $x > -1 + \sqrt{7}$ o $x < -1 - \sqrt{7}$, Quindi:

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > -1 + \sqrt{7}$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < -1 + \sqrt{7}.$$

Da queste osservazioni deduciamo che

$$f \quad \text{è crescente per} \quad x > -1+\sqrt{7}$$
$$f \quad \text{è decrescente per} \quad 0 < x < -1+\sqrt{7}$$

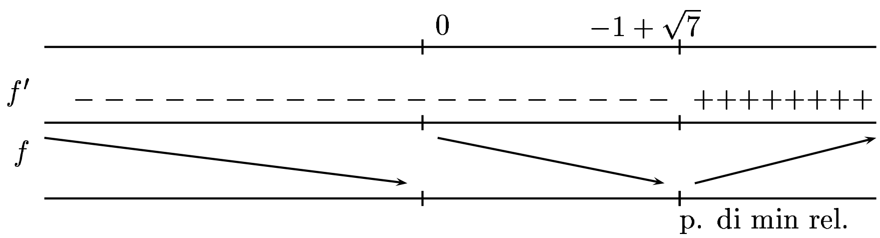
quindi il punto $x_1 = -1+\sqrt{7}$ è un punto di minimo relativo per $f$.

Zeri della derivata prima per $x < 0$.

$$-x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

non esistono radici reali, il coefficiente del termine di secondo grado è negativo, quindi il polinomio é sempre negativo. Per cui $f'(x) < 0, \ \forall x < 0$ ovvero $f$ è decrescente su $(-\infty, 0)$

Possiamo riassumere nel seguente schema quanto ottenuto.




Osserviamo che $f$ è continua in $x = 0$ e poichè, per quanto osservato in precedenza, $f(x) > f(0)$ per $x < 0$ e $f(0) > f(x)$ per ogni $0 < x < -1+\sqrt{7}$ possiamo dedurre che $f$ è decrescente sulla semiretta $(-\infty, -1+\sqrt{7})$.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -6, \quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = -2$$

Le rette tangenti al grafico di $f$nel punto $x = 0$ sono

tangente destra : $\psi_+(x) = -6x + 2$

tangente sinistra : $\psi_-(x) = -2x + 2$

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x^2+2x-6)(x+1)}{(x+1)^4}, & x > 0, \\[2ex] \dfrac{(-2x+2)(-x+1)^2 - 2(-x^2+2x-2)(-x+1)}{(-x+1)^4}, & x < 0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2\dfrac{(x+1)^2 - (x^2+2x-6)}{(x+1)^3}, & x > 0, \\[2ex] 2\dfrac{(-x+1)^2 - (-x^2+2x-2)}{(-x+1)^3}, & x < 0, \end{cases}$$

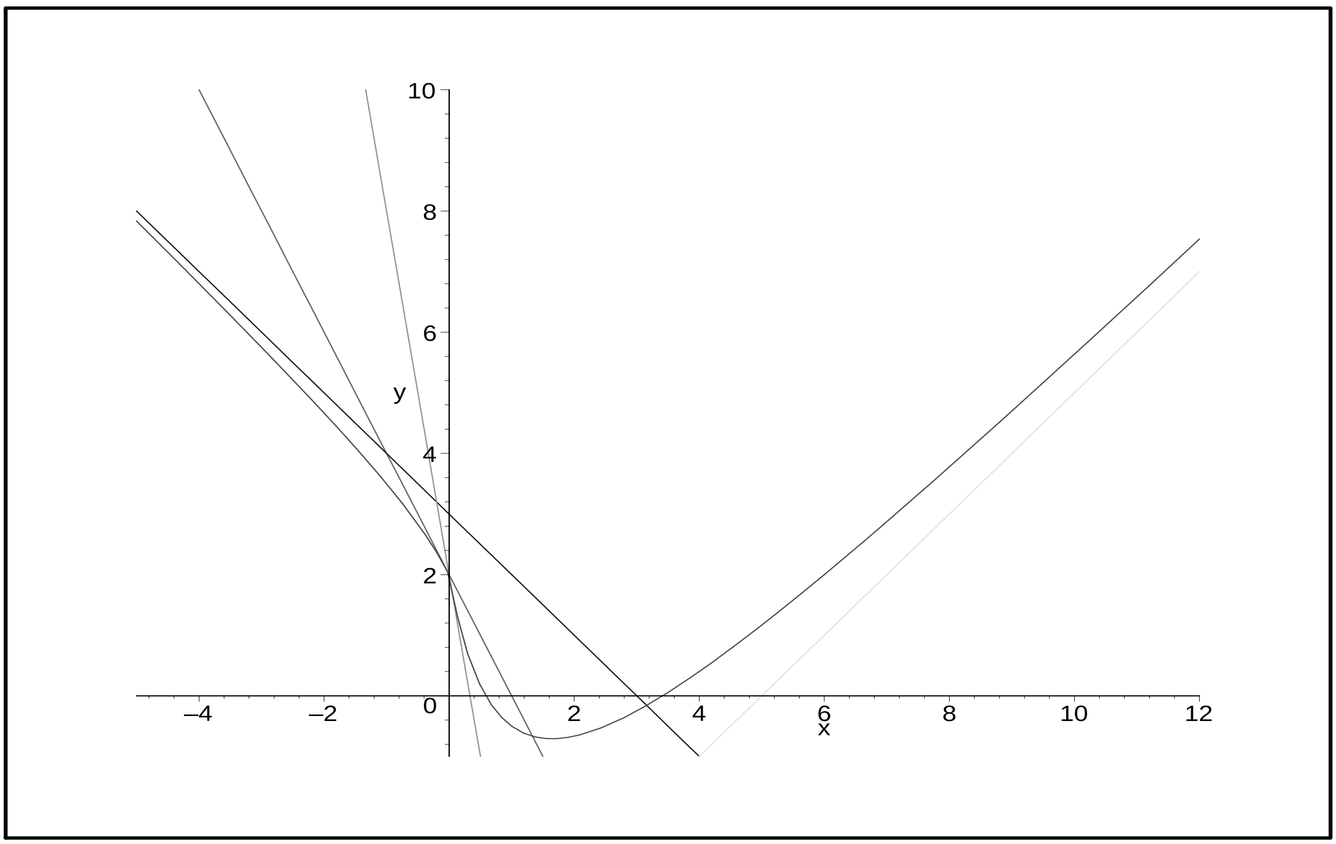
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{14}{(x+1)^3}, & x > 0, \\ \\ \dfrac{-4}{(-x+1)^3}, & x < 0, \end{cases}$$

Dunque

$$f''(x) > 0, \text{ per } \Rightarrow f \text{ convessa per } \quad x > 0$$
$$f''(x) < 0, \text{ per } \Rightarrow f \text{ concava per } \quad x < 0$$

| $x$ | $2+\sqrt{2}$ | $2-\sqrt{2}$ | 0 | $-1+\sqrt{7}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0 | 2 | -0,71 |

Grafico della funzione



**(3)** Data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x\ -\ 3}}$$

**(a)** Dire se $f(x)$ è integrabile in senso improprio sull'intervallo $(3,4]$.
**(b)** Determinare il valore del seguente integrale:

$$\int_3^4 \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x\ -\ 3}}\ dx.$$

**Svolgimento (a)**

Il numeratore dell'espressione di $f$ (è la funzione logaritmo) è definito per $x > 1$, mentre al denominatore la radice quadrata è definita per $x \geq 0$. Inoltre deve essere $x \neq 0$. Il dominio di $f$ è dunque:

$$Dom f = \{x : x > 3\}.$$

Su questo insieme la funzione è continua, ma non limitata in un intorno di $x = 3$ perchè:

$$\lim_{x \to 3+} \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-3}} = +\infty,$$

dunque non è intergrabile secondo Riemann in $(3,4]$. Dimostriamo che invece è integrabile in senso improprio in questo intervallo mediante il *teorema del confronto*:

$$0 < \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-3}} < \frac{\log 3}{\sqrt{x-3}}, \quad \forall x \in (3,4].$$

Da cui, essendo $\dfrac{1}{(x-3)^{\frac{1}{2}}}$ integrabile in senso improprio nell'intervallo considerato, anche $f$ è integrabile in senso improprio su $(3,4]$.

**Svolgimento (b)**

Utilizziamo la definizione di integrale improprio:

$$\int_3^4 f(x)\ dx = \lim_{s \to 3+} \int_s^4 f(x)\ dx \tag{4}$$

Calcoliamo dunque le primitive di $f$ risolvendo per parti l'intergrale indefinito

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-3}} \tag{5}$$

Procediamo integrando per parti [1] prendendo:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad \text{e} \quad G(x) = \log(x-1) \quad \text{quindi} \quad F(x) = 2\sqrt{x-3}$$

Sostituendo nella formula otteniamo:

[1]Formula di integrazione per parti: $\int F'(t)\,G(t)\ dt = F(x)\,G(x) - \int F(t)\,G'(t)\ dt.$

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x\ -\ 3}}\ dx = 2\sqrt{x-3}\ \log(x-1)\ -\ 2\int \sqrt{x-3}\ \frac{1}{x-1}\ dx. \qquad (6)$$

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile nell'ultimo integrale di (6):

$$t = \sqrt{x-3},\ \text{ quindi } x = t^2 + 3 \text{ e } dx = 2t\ dt$$

sostituendo:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x-3}\ \frac{1}{x-1}\ dx \quad &= \quad 2\int \frac{t^2}{t^2+2}\ dt\ =\ 2\int \left(\frac{t^2+2}{t^2+2}\ -\ \frac{2}{t^2+2}\right)\ dt\ = \\
&= \quad 2\int \left(1\ -\ \frac{2}{t^2+2}\right)\ dt\ =\ 2\left(t\ -\ 2\int \frac{1}{t^2+2}\right)\ dt\ = \\
&= \quad 2\left[t\ -\ \sqrt{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ dt\right]\ = \\
&= \quad 2t\ -\ 2\sqrt{2}\ \arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

Tenuto conto delle posizioni fatte:

$$\int \frac{\sqrt{x-3}}{x-1}\ dt\ =\ 2\sqrt{x-3}\ -\ 2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2}}\ +\ C.$$

Sostituendo in (4)

$$\begin{aligned}
\int_3^4\ f(x)\ dx \quad &= \quad \lim_{s\to 3+}\int_s^4\ f(x)\ dx\ = \\
&= \quad \lim_{s\to 3+}\left[2\sqrt{x-3}\ \log(x-1)\ -\ 2\left(2\sqrt{x-3}\ -\ 2\sqrt{2}\ \arctan\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2}}\ +\ C\right)\right]_s^4\ = \\
&= \quad 2\log 3\ -\ 4\ +\ 2\sqrt{2}\ \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\ + \\
&- \quad \lim_{s\to 3+}\left\{2\sqrt{s-3}\ \log(s-1)\ -\ 2\left(2\sqrt{s-3}\ -\ 2\sqrt{2}\ \arctan\frac{\sqrt{s-3}}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \\
&= \quad 2\ \log 3\ -\ 4\ +\ 2\sqrt{2}\ \arctan\frac{1}{\sqrt{2}.}
\end{aligned}$$

**(4)** Data:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\ +\ \sqrt{n}\ +\ 3}. \qquad (7)$$

dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie risulta *assolutamente convergente* e per quali valori risulta *convergente.*

**Svolgimento.**

Iniziamo studiando la *convergenza assoluta* della serie, ovvero consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n + \sqrt{n} + 3}. \tag{8}$$

(il denominatore è sempre positivo)
Ci siamo ricondotti ad una serie a termini non negativi, possiamo applicare il *criterio del rapporto:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}+3}}{\frac{|x|^n}{n+\sqrt{n}+3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |x| \frac{n+\sqrt{n}+3}{n+1+\sqrt{n+1}+3} = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n+1}}{n}+\frac{3}{n}} = |x|$$

Per $|x| < 1$ la serie (8) è *convergente* quindi la serie (7) è *assolutamente convergente* per $|x| < 1$ . Da questo segue, per il criterio sulla *convergenza assoluta* delle s. che (7) è convergente per $|x| < 1$.

Consideriamo ora il caso $x > 1$, relativamente alla serie (7), applichiamo il criterio del rapporto. Effettuando gli stessi calcoli fatti sopra:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x\ (> 1)$$

Quindi la serie diverge.

Sia $x = 1$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n} + 3}. \tag{9}$$

Applichiamo il criterio degli infinitesimi (o del limite):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n + \sqrt{n} + 3} \overset{p=1}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n} + 3} = 1.$$

Da questo possiamo dedurre che la serie (9) è divergente perchè si comporta come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge.

Per $x = -1$ la serie (7) diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n} + 3}. \tag{10}$$

che è una serie a termini di segno alterno. Applicando il relativo criterio possiamo stabilire che converge, in quanto la successione $\frac{1}{n+\sqrt{n+3}}$ è decrescente ed infinitesima.

Sia $x < -1$, (in particolare $x < 0$) dunque per definizione di valore assoluto: $x = (-1)|x|$ essendo $x^n = (-1)^n |x|^n$ la serie (7) diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n + \sqrt{n} + 3}. \tag{11}$$

Questa non converge in quanto il suo termine generale non è infinitesimo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^n}{n + \sqrt{n} + 3} = +\infty \quad (|x| > 1.)$$

(essendo a termini di segno alterno si può con più precisione affermare che è indeterminata).

Riasumiamo il comportamento della serie

| | | | |
|---|---|---|---|
| per | $x > 1$ | diverge | |
| per | $x = 1$ | diverge | |
| per | $\lvert x\rvert < 1$ | converge | ed anche: converge assolutamente |
| per | $x = -1$ | converge | |
| per | $x < -1$ | indeterminata | |