ANALISI MATEMATICA

(CORSO D - CdL INFORMATICA)

Prova scritta del 28/6/2004

(1) Determinare, mediante il polinomio di Taylor, i valori di $\alpha > 0$ e $\mathcal{L} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x}}{x^\alpha} = \mathcal{L}$$

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\, e^{\frac{|x|-1}{x-2}}$$

1. Determinare il dominio di f e stabilire se esistono asintoti.
2. Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
3. Determinare gli intervalli dove f risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
4. Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{x+4}\ \arctan\sqrt{x+4}\ dx.$$

(4) Data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \frac{1}{n},$$

dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risulta *assolutamente convergente* e per quali valori risulta *convergente.*

Risoluzione degli esercizi proposti

(1) Determinare, mediante il polinomio di Taylor, i valori di $\alpha > 0$ e $\mathcal{L} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x}}{x^\alpha} = \mathcal{L}$$

Svolgimento

Consideriamo gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $y_0 = 0$, realtivi alle funzioni che compaiono nel limite:

$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y)$ per $y = -\frac{x}{2}$ otteniamo $e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$ per $y = \sqrt{x}$ otteniamo $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$

Sostituiamo questi sviluppi al denominatore della funzione della quale dobbiamo calcolare il limite:

$$e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

Quindi l'espressione del limite diventa:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{12}\,x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{12}\,x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{12} \lim_{x \to 0+} x^{2-\alpha} = \frac{1}{12}$$

per $\alpha = 2$.

(2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\, e^{\frac{|x|-1}{x-2}}$$

1. Determinare il dominio di f e stabilire se esistono asintoti.
2. Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
3. Determinare gli intervalli dove f risulta concava o convessa ed eventuali flessi.
4. Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in quanto la funzione è costituita dal prodotto della funzione $y = x$, che è definita su tutto $\mathbb{R}$, e di una funzione esponenziale; l'argomento di quest'ultima è una frazione: si devono quindi escludere quei valori che annullano il suo denominatore, nel nostro caso $x = 2$. Concludendo $Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

La funzione si può anche scrivere nella forma seguente esplicitando il termine $|x|$ che compare nell'espressione:

$$f(x) \;=\; x\; e^{\frac{|x|-1}{x-2}} \;=\; \begin{cases} x\; e^{\frac{x-1}{x-2}}, & x \geq 0 \\ \\ x\; e^{\frac{-x-1}{x-2}}, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Determiniamo il comportamento di f agli estremi del suo dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; +\infty$$

Il punto 2 non appartiene a $Dom\, f$. Esaminiamo il comportamento di f in un intorno i questo punto.

$$\lim_{x\to 2+} f(x) \;=\; 2\, e^{\frac{1}{0+}} \;=\; e^{+\infty} \;=\; +\infty.$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) \;=\; 2\, e^{\frac{1}{0-}} \;=\; e^{-\infty} \;=\; 0$$

Vediamo se esistono asintoti obliqui.[1]

<u>1^0 asintoto per $x \to +\infty$</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;&=\; \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x-1}{x-2}} \;=\; e \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - e\,x \;&=\; \lim_{x\to+\infty} x\; e^{\frac{x-1}{x-2}} \;-\; e\,x \;= \\
&=\; \lim_{x\to+\infty} e\,x\, \left[e^{\frac{x-1}{x-2}-1} \;-\; 1\right] \;= \\
&=\; \lim_{x\to+\infty} e\,x\, \left[e^{\frac{1}{x-2}} \;-1\right]
\end{aligned}$$

Il limite può essere risolto mediante lo *sviluppo di Taylor* della funzione esponenziale prendendo come punto iniziale $y_0 = 0$, e ponendo $y = \dfrac{1}{x-2}$. Infatti basta osservare che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} \;=\; 0$. Quindi

$$e^{\frac{1}{x-2}} \;=\; 1 \,+\, \frac{1}{x-2} \,+\, o\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

Sostituendo nel limite, otteniamo in definitiva:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;-\; e\,x \;=\; \lim_{x\to+\infty} e\,x\, \left[\frac{1}{x-2} \;+\; o\left(\frac{1}{x-2}\right)\right] \;=\; e$$

Perchè

$$\lim_{x\to+\infty} x\;\; o\left(\frac{1}{x-2}\right) \;=\, , \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-2}\; \frac{o\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} \;=\; 0 \quad \text{(per definizione di o} - \text{piccolo).}$$

[1] Il risultato del limite per $x \to 2^{+}$, calcolato sopra, permette di stabilire che la retta $x = 2$ é un asintoto verticale per f.

In conclusione: asintoto per $x \to +\infty$:

$$\varphi_1(x) \,=\, e\,x \,+\, e$$

<u>2^0 asintoto per $x \to -\infty$</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad &= \quad \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{-x-1}{x-2}} \;=\; \frac{1}{e} \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{1}{e}\,x \quad &= \quad \lim_{x\to-\infty} x\, e^{\frac{-x-1}{x-2}} \;-\; \frac{1}{e}\,x \;= \\
&= \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e} \left[e^{-\frac{3}{x-2}} \;-1\right] =
\end{aligned}$$

(ragionando come nel limite precedente)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e}\left[-\frac{3}{x-2} + o\left(\frac{1}{x-2}\right)\right] = -\frac{3}{e}.$$

In conclusione, asintoto per $x \to -\infty$:

$$\varphi_2(x) \,=\, \frac{1}{e}\,x \,-\, \frac{3}{e}.$$

Studio della derivata prima:

$$f'(x) \,=\, \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x-2}} \left(1 \,-\, \dfrac{x}{(x-2)^2}\right) \,=\, e^{\frac{x-1}{x-2}} \quad \dfrac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}, \qquad x>0 \\[2ex] e^{\frac{-x-1}{x-2}} \left(1 \,+\, \dfrac{3x}{(x-2)^2}\right) \,=\, e^{\frac{-x-1}{x-2}} \quad \dfrac{x^2-x+4}{(x-2)^2}, \qquad x<0 \end{cases} \tag{2}$$

Zeri della derivata prima per $x > 0$:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \quad x_{1,2} = \{1,\ 4\}.$$

La diseguaglianza $x^2 - 5x + 4 > 0$ è verificata per $x > 4$ o $x < 1$. Quindi:

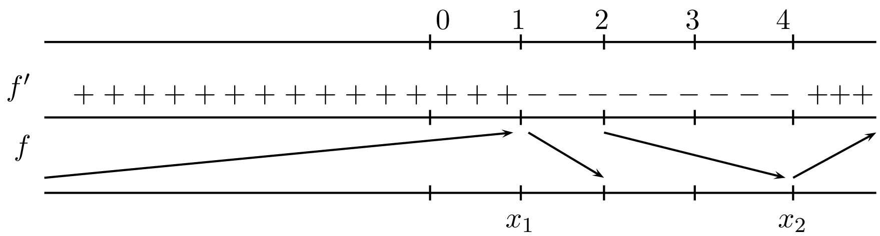
$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 4 \quad \text{oppure} \quad 0 < x < 1, \\
f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < 4 \quad \text{e} \quad x \neq 2.
\end{aligned}$$

Da queste osservazioni deduciamo che

$$\begin{aligned}
&f \quad \text{è crescente per} \quad x > 4 \quad \text{oppure} \quad 0 < x < 1, \\
&f \quad \text{è decrescente per} \quad 1 < x < 2 \quad \text{e} \quad 2 < x < 4.
\end{aligned}$$

quindi il punto $x_1 = 1$ è un punto di *massimo relativo* per f, mentre il punto $x_2 = 4$ è un punto di minimo relativo per f.

Per determinare gli zeri della derivata prima quando $x < 0$ si considera l'equazione $x^2 - x + 4 = 0$. Osserviamo che in questa equazione risulta $\Delta = -15 < 0$. Questo implica che non esitono radici reali. Inoltre, essendo il coefficiente del termine di secondo grado positivo, il polinomio é sempre positivo. Per cui $f'(x) > 0, \ \forall x < 0$ ovvero f è crescente su $(-\infty, 0)$
Possiamo riassumere nel seguente schema quanto ottenuto.



Osserviamo che f è continua in $x = 0$. Poichè $f(x) < f(0) = 0$ per $x < 0$ e $f(0) = 0 < f(x)$ per ogni $0 < x$ possiamo dedurre, tenuto conto di quanto stabilito sopra, che f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 1)$.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \sqrt{e}, \quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = \sqrt{e}$$

La retta tangente al grafico di $f$nel punto $x = 0$ è: $\psi(x) = \sqrt{e}\, x$

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x-2}} \left[-\dfrac{1}{(x-2)^2} \left(1 - \dfrac{x}{(x-2)^2}\right) - \dfrac{(x-2)^2 - 2x(x-2)}{(x-2)^4} \right], & x > 0, \\[2ex] e^{\frac{-x-1}{x-2}} \left[\dfrac{3}{(x-2)^2} \left(1 + \dfrac{3x}{(x-2)^2}\right) + \dfrac{3(x-2)^2 - 6x\,(x-2)}{(x-2)^4} \right], & x < 0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x-2}} \dfrac{5x-8}{(x-2)^4}, & x > 0, \\[2ex] e^{\frac{-x-1}{x-2}} \dfrac{-3x+24}{(x-2)^4}, & x < 0, \end{cases}$$

L'esponenziale ed il denominatore della frazione sono sempre positivi. Il segno di f'' è determinato dal segno dei numeratori:

$$5x - 8 > 0 \quad \text{se} \quad x > \frac{8}{5}, \text{ mentre } \quad 5x - 8 < 0 \qquad \text{se} \quad x < \frac{8}{5}.$$

Invece l'espressione $-3x + 24 > 0,\ \forall x < 0$.
Dunque

$$f''(x) > 0, \text{ per } x < 0 \text{ oppure } x > \frac{8}{5} \Rightarrow f \text{ convessa per } \quad x < 0 \text{ oppure } x > \frac{8}{5}$$

$$f''(x) < 0, \text{ per } 0 < x < \frac{8}{5} \Rightarrow f \text{ concava per } \quad 0 < x < \frac{8}{5}.$$

In particolare $x = \frac{8}{5}$ è un punto di flesso.

x	0	1	$\frac{8}{5}$	4
$f(x)$	0	1	0,89	17,84

Grafico della funzione per $x < 2$.

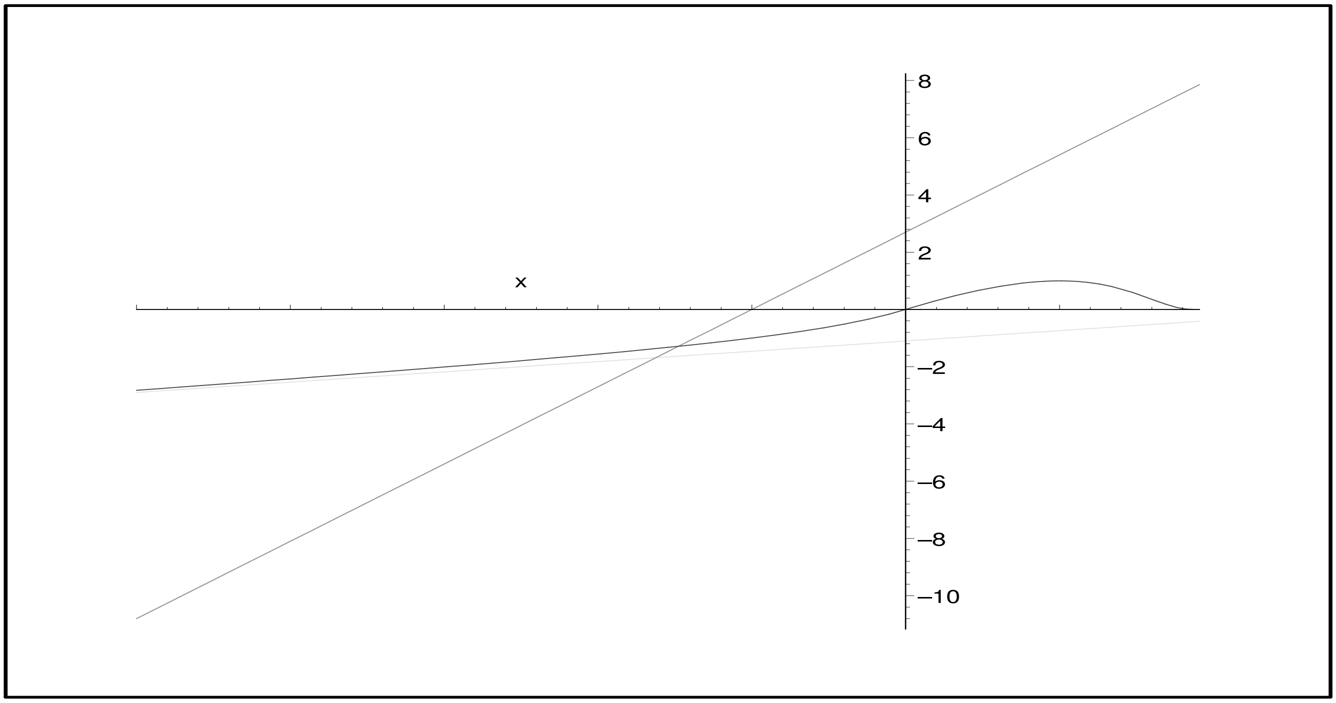
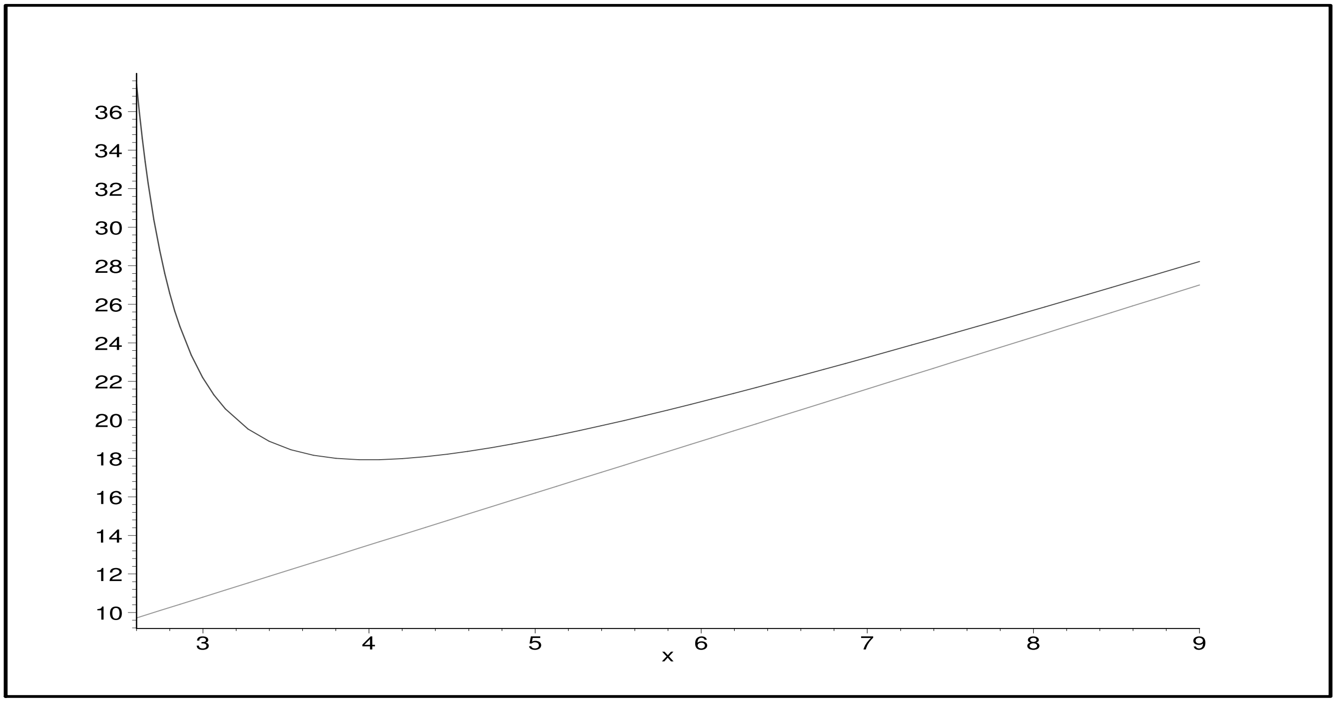


Grafico della funzione per $x > 2$.



(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{x+4}\ \arctan \sqrt{x+4}\ dx.$$

Svolgimento (a)

Calcoliamo dunque le primitive della funzione effettuando nell'integrale proposto il seguente cambiamento di variabile

$$\sqrt{x+4} = t, \quad x = t^2 - 4, \quad dx = 2t\,dt.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int 2t^2 \ \arctan t \ dt &= \frac{2}{3}\, t^3 \ \arctan t - \frac{2}{3} \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \\ &= \frac{2}{3}\, t^3 \ \arctan t - \frac{2}{3} \int \left(\frac{t^3+t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \\ &= \frac{2}{3}\, t^3 \ \arctan t - \frac{2}{3} \int t\, dt + \frac{2}{3} \int \frac{t}{1+t^2}\, dt = \\ &= \frac{2}{3}\, t^3 \ \arctan t - \frac{1}{3}\, t^2 + \frac{1}{3} \log(1+t^2) + C\,, \ \ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nel primo passaggio abbiamo effettuato un'integrazione per parti [2] prendendo:

$$F'(t) = 2\,t^2, \quad \text{quindi} \quad F(t) = \frac{2}{3}\, t^3, \quad \text{e} \quad G(t) = \arctan t \quad \text{quindi} \quad G'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Tenuto conto delle posizioni fatte, in conclusione:

$$\int \sqrt{x+4} \ \arctan \sqrt{x+4} \ dx = \frac{2}{3} (\sqrt{x+4})^3 \ \arctan \sqrt{x+4} - \frac{1}{3}(x+4) + \frac{1}{3} \log(x+5) + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

(4) Data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \frac{1}{n}, \tag{3}$$

dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risulta *assolutamente convergente* e per quali valori risulta *convergente.*

Svolgimento.

Iniziamo studiando la *convergenza assoluta* della serie, ovvero consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x-1}{2} \right|^n \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Ci siamo ricondotti ad una serie a termini non negativi, possiamo applicare il *criterio della radice n-esima:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x-1}{2} \right|^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x-1}{2} \right| \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \left| \frac{x-1}{2} \right|.$$

Perchè $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Per $\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1$ la serie (4) è *convergente* quindi la serie (3) è *assolutamente convergente* per $\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1$, ovvero (risolvendo la disequazione) per $-1 < x < 3$. Da questo segue, per il criterio sulla *convergenza assoluta* delle s. che (3) è convergente per $-1 < x < 3$.

[2] Formula di integrazione per parti: $\int F'(t)\, G(t)\, dt = F(t)\, G(t) - \int F(t)\, G'(t)\, dt$.

Consideriamo ora il caso $x > 3$, relativamente alla serie (3), applichiamo ancora il *criterio della radice ennesima* (si tenga presente che per questi valori del parametro x il termine generale della serie è positivo):

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x-1}{2}\right)^n \frac{1}{n}} = \frac{x-1}{2} > 1$$

Perchè abbiamo considerato $x > 3$. Quindi la serie diverge.

Sia $x = 3$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{5}$$

che diverge (*serie armonica* con esponente $\alpha = 1$).

Per $x = -1$ la serie (3) diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \tag{6}$$

che è una *serie a termini di segno alterno*. Applicando il relativo criterio possiamo stabilire che converge, in quanto la successione $\frac{1}{n}$ è decrescente ed infinitesima.

Sia $x < -1$, si ha che $\frac{x-1}{2} < 0$, dunque per definizione di valore assoluto:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^n = (-1)^n \left|\frac{x-1}{2}\right|^n$$

la serie (3) diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left|\frac{x-1}{2}\right|^n \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Questa non converge in quanto il suo termine generale non è infinitesimo

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x-1}{2}\right|^n \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{perchè} \quad \left|\frac{x-1}{2}\right| > 1, \quad \text{per} \quad x < -1.$$

(essendo *a termini di segno alterno* si può, con più precisione, affermare che è indeterminata).

Riassumiamo il comportamento della serie

per	$x > 3$	diverge	
per	$x = 3$	diverge	
per	$-1 < x < 3$	converge	ed anche: converge assolutamente
per	$x = -1$	converge	
per	$x < -1$	indeterminata.	