# Analisi Matematica (Corso D)
# CdL in Informatica

Prova scritta del 16/9/2003

**(1)** Determinare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\sin x \,-\, x\,e^{\sqrt{x}} + x}{x \,-\, \log(x+1)}.$$

**(2)** Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 \,-\, 4}{x^2},$$

determinare: gli intervalli dove è crescente e dove è decrescente, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo, eventuali asintoti, gli intervalli dove è concava o convessa. Tracciarne un grafico approssimato.

**(3)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{x \,+\, \sqrt{x} \,-\, 2}\, dx.$$

**(4)** Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \,+\, 1}{n^n \,+\, n!}.$$

**SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI.**

ESERCIZIO 1.

Scriviamo il polinomio di Taylor relativo alle funzioni che compaiono nel limite.

$$\sqrt{x}\,\sin x = \sqrt{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \sqrt{x}\,x - \frac{x^3\sqrt{x}}{6} + o(x^{\frac{7}{2}}).$$

$$x\,e^{\sqrt{x}} = x\,\left(1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)\right) = x + x\,\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Sostituiamo nel limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\sin x \; - \; x\,e^{\sqrt{x}} + \; x}{x \; - \; \log(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\,x - \frac{x^3\sqrt{x}}{6} + o(x^{\frac{7}{2}}) - x - x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x}{x - \log(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = -1$$

ESERCIZIO N.2

Il dominio della funzione è: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$lim_{x\to 0\pm}\; f(x) = -\infty$$

(perché il numeratore è negativo ed il denominatore tende a $0^+$). La funzione ha quindi un asintoto verticale per $x = 0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Vediamo se la funzione ha asintoti all'infinito $\phi(x) = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4}{x^2} = 0.$$

La funzione ammette come asintoto per $x \to \pm\infty$ la retta: $y = x$.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - (x^3 - 4)2x}{x^4} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

La derivata prima si annulla per $x = -8$. Segno della derivata prima. $f'(x) > 0$ per i valori di $x$ che sono soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{cases} x^3 + 8 < 0 \\ x^3 < 0 \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che $f'(x) > 0$ per $x > 0$ oppure $x < -2\sqrt{2}$. Mentre $f'(x) < 0$ per $-2\sqrt{2} < x < 0$.

La funzione risulta quindi crescente negli intervalli: $(0, +\infty)$ e $(-\infty, -2\sqrt{2})$, decrescente nell'intervallo $(-2\sqrt{2}, 0)$. Il punto $x = -2\sqrt{2}$ è di massimo relativo.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{3x^5 - (x^3 + 8)3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4}.$$

La derivata seconda risulta sempre negativa. Dunque $f$ è concava sugli intervalli: $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Il grafico della funzione è il seguente:

ESERCIZIO N. 3

Effetuiamo un cambiamento di variabile nell'integrale assegnato ponendo:

$$t = \sqrt{x}, \text{ da cui } dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx, \quad dx = 2t\, dt.$$

Sostituiamo le espressioni ottenute nell'integrale:

$$\int \frac{2t}{t^2 + t - 2}\, dt =$$

(le radici del polinomio al denominatore sono $t_1 = -2, t_2 = 1$.)

$$= \int \frac{2t}{(t+2)(t-1)}\, dt = \int \frac{A}{t+2}\, dt + \frac{B}{t-1}\, dt = \int \frac{t(A+B) - A + 2B}{(t+2)(t-1)}\, dt$$

Il numeratore della frazione integranda deve verificare l'eguaglianza: $t(A + B) - A + 2B = 2t$, determiniamo quindi $A, B$, in modo che essa sia verificata risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2B - A = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{2}{3}$.

L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{4}{3}\frac{1}{t+2}\, dt + \int \frac{2}{3}\frac{1}{t-1}\, dt = \frac{4}{3}\log|t+2| + \frac{2}{3}\log|t-1| + C =$$

(tenendo conto della posizione iniziale)

$$= \frac{4}{3}\log|\sqrt{x} + 2| + \frac{2}{3}\log|\sqrt{x} - 1| + C.$$

ESRCIZIO N. 4

La serie considerata è a termini positivi, possimo dunque applicare il criterio del confronto maggiorando il termine generale della serie nel modo seguente:

$$\frac{2^n + 1}{n^n + n!} < \frac{2^{n+1}}{n^n},$$

(Perchè: $2^n + 1 < 2^{n+1}$ e $n^n < n^n + n!$.)

Applichiamo il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = 0 < 1.$$

quindi la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$$

è convergente. Poiché abbiamo verificato sopra che il suo termine generale maggiora il termine generale della serie di partenza, possiamo concludere che anch'essa è convergente.