

ESERCIZI SULLE SERIE

Studiare la natura delle seguenti serie. ¹

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n^4}{n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} \quad 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n + n}{3^n + n^2} \quad 6) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2 + n}{1 + n + n^2} \quad 7) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \quad 9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n!}{n^3} \quad 10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n!}}$$

Studiare al variare di x in \mathbb{R} la natura delle seguenti serie:

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n 2^n} \quad 12) \sum_{n=1}^{+\infty} n^x x^n$$

¹I risultati sono a pagina 2, le risoluzioni a partire da pagina 2.

RISPOSTE

CONVERGENTI: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10

DIVERGENTI: 4, 8

ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI: 1, 3, 5

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI 1) La serie data non è a termini di segno costante perchè $\cos n^4$ cambia di segno al variare di n . Consideriamo allora la seguente serie:

$$*) \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n^4}{n^2 + 1} \right|$$

Osserviamo che valgono le maggiorazioni:

$$\left| \frac{\cos n^4}{n^2 + 1} \right| < \frac{1}{n^2}$$

(perché: $|\cos n^4| \leq 1$ mentre $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$.) Dal teorema del confronto per le serie, otteniamo che *) converge, dunque la serie di partenza è convergente assolutamente, perciò convergente, per il criterio della convergenza assoluta.

2) Si tratta di una serie a termini di segno costante, infatti $0 < \frac{1}{3^n} < \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, per cui $\sin \frac{1}{3^n} > 0$. Vale anche $\sin \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n}$, (per la maggiorazione $|\sin x| \leq |x|$, con $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.) Possiamo dunque applicare il criterio del confronto per le serie a termini di segno costante maggiorando la serie data nel modo che segue:

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Osserviamo che $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è il termine generale della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ di ragione $x = \left(\frac{2}{3}\right) < 1$, che come è noto converge. Quindi, per il criterio del confronto la serie data converge.

3) Si tratta di una serie a termini positivi. Appliciamo il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2(n+2)}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)(2n+2) \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n\right]^2 = 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 = \frac{4}{e^2} < 1. \end{aligned}$$

Quindi la serie risulta convergente.

4) Osserviamo che il termine generale della serie non è infinitesimo, non è dunque verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie. Poiché

si tratta di serie a termini positivi questa divergerà a $+\infty$. Verifichiamo dunque che il termine generale non tende a zero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2} \right]^{-1} = \frac{1}{e}$$

Perché se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$ allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

5) Si tratta di una serie a termini di segno alterno, (serie alterna) possiamo applicare il criterio di convergenza relativo a questo tipo di serie deducendone la sua convergenza, infatti si verifica che:

i) la successione $a_n = \frac{2^n + n}{3^n + n^2}$ è decrescente

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

La verifica di i) è semplice. Dimostriamo ii):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n}{3^n + n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \left(1 + \frac{n}{2^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{n^2}{3^n}\right)} = 0$$

Perché: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$.

Possiamo arrivare a dimostrare che la serie converge anche utilizzando il criterio della convergenza assoluta, infatti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{2^n + n}{3^n + n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n}{3^n + n^2}$$

Si dimostra che quest'ultima converge, utilizzando il criterio della radice ennesima, infatti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + n}{3^n + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \sqrt[n]{\frac{1 + \frac{n}{2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}}} = \frac{2}{3} < 1$$

(Il termine sotto la radice ennesima tende a 1).

6) Si dimostra facilmente che la serie è convergente applicando il criterio delle serie alterne, infatti:

a) la successione $a_n = \frac{2+n}{1+n+n^2}$ è decrescente;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n}{1+n+n^2} = 0$, perché:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n}{1+n+n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(\frac{2}{n} + 1\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

7) Possiamo dimostrare che la serie converge applicando il criterio del confronto perchè si tratta di una serie a termini positivi. A tale scopo utilizziamo la maggiorazione: $\log x < x$, in questo modo:

$$\log n = \log(\sqrt[4]{n})^4 = 4 \log \sqrt[4]{n} < 4\sqrt[4]{n} \quad (\text{dove } x = \sqrt[4]{n}).$$

Applichiamo questo risultato per maggiorare il termine generale della serie data:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2 &< \left(\frac{4\sqrt[4]{n}}{n}\right)^2 = \\ &= \frac{16\sqrt{n}}{n^2} = \frac{16}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

La successione $a_n = \frac{16}{n^{\frac{3}{2}}}$ è il termine generale di una serie armonica con esponente $p = \frac{3}{2} > 1$, che risulta dunque convergente.

8) La serie è divergente perché è a termini positivi ed il termine generale non tende a zero, cioè non è verificata la condizione necessaria per la convergenza di una serie, infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1-\frac{1}{n})}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1+\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} = e^2. \end{aligned}$$

(per l'ultimo passaggio vedi lo svolgimento dell'esercizio N. 4).

9) I termini della serie data sono non negativi. Possiamo applicare il criterio del confronto, utilizzando la maggiorazione $n! \leq n^n$, e la proprietà di monotonia della funzione logaritmo: $x_1 < x_2 \Rightarrow \log x_1 < \log x_2$,² otteniamo:

$$\frac{\log n!}{n^3} \leq \frac{\log n^n}{n^3} = \frac{n \log n}{n^3} =$$

(vedi esercizio N. 7)

$$= \frac{n \log(\sqrt{n})^2}{n^3} \leq \frac{2n \sqrt{n}}{n^3} = 2 \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La successione: $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è il termine generale di una serie armonica con $p = \frac{3}{2} > 1$, che quindi è convergente.

10) La serie è a termini positivi, si utilizza il criterio del confronto. Ricordiamo la disuguaglianza: $n^n \leq (n!)^2$, che equivale alla seguente:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Quindi

$$\frac{1}{n \sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{n \sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

²ricordiamo che i logaritmi che consideriamo sono in base e : $\log = \log_e$

Si conclude nello stesso modo dell'esercizio N. 9.

11) Determiniamo per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge assolutamente, cioè studiamo la natura della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n 2^n}$$

Questa è a termini positivi, possiamo applicare il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n 2^n}} = \frac{|x|}{2}$$

La serie converge assolutamente, quindi converge (criterio della convergenza assoluta) per i valori di x tali che $\frac{|x|}{2} < 1$, ossia: $|x| < 2$. Consideriamo ora i valori del parametro $x \geq 2$.

$$x = 2$$

La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che è una serie armonica divergente ($p = 1$).

$$x > 2$$

In questo caso si tratta di una serie a termini positivi con il termine generale che non tende a zero. Quindi la serie risulta divergente. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} = +\infty$$

(ricordare il limite notevole $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$, per $a > 1$).

$$x = -2$$

La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Converge per il criterio delle serie alterne perchè $a_n = \frac{1}{n}$, risulta decrescente e infinitesima.

$$x < -2$$

Poiché $x < 0$ possiamo scrivere (per definizione di valore assoluto): $x = -|x|$, dunque $x^n = (-|x|)^n = (-1)^n |x|^n$. Sostituendo nella serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n 2^n}$$

In questo caso il termine generale non è infinitesimo (vedi sopra), poiché la serie è a termini di segno alterno, possiamo concludere che è indeterminata.

12) Determiniamo per quali valori del parametro reale x la serie converge assolutamente, cioè consideriamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x |x|^n.$$

Applichiamo il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^x |x|^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^x} |x| = |x|$$

Per i valori di x tali che $|x| < 1$ la serie risulta assolutamente convergente e dunque convergente. Consideriamo i valori di x tali che: $|x| > 1$.

$$x = 1$$

La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n 1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n = +\infty.$$

Perché è a termini positivi ed il termine generale non è infinitesimo. Stesso discorso nel caso seguente:

$$x > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n^x x^n = +\infty$$

$$x = -1$$

Allora:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Converge per il criterio delle serie alternate.

$$x < -1$$

Ragionando come nell'esercizio precedente: $x < 0$ implica $x = -|x|$. Sostituendo nell'espressione della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-|x|} (-|x|)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{|x|}} |x|^n$$

La serie ottenuta ha i termini a segno alterno, ma non tendono a zero, dunque risulta indeterminata (vedi anche esercizio precedente).