Prova scritta del 6/2/2003

Soluzione degli esercizi N.4

Le quattro serie proposte sono a termini positivi. Infatti i denominatori dei termini generali sono potenze di $n \in \mathbb{N}$. Mentre i numeratori sono costituiti dalla somma di un numero intero positivo e di una potenza pari di x, quindi sono positivi. Per studiare la convergenza delle serie proposte possiamo ricorrere ai criteri di convergenza:
a) *criterio del confronto,*
b) *criterio della radice,*
c) *criterio del rapporto,*
d) *criterio del limite.*
Svolgiamo ciascun esecizio con un criterio diverso.

Fila 3. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + x^{6n}}{n^4}.$$

Osserviamo che il limite della successione $\{x^{6n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dipende dal valore assunto da x, più precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} x^{6n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \mid x \mid > 1 \\ 1 & \text{se } x = \pm 1 \\ 0 & \text{se } \mid x \mid < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite del termine generale della serie nel caso in cui $\mid x \mid > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + x^{6n}}{n^4} = +\infty.$$

Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie (cioè il termine generale deve essere infinitesimo), quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge se $\mid x \mid > 1$.

Se $| x | \leq 1$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + x^{6n}}{n^4} = 0.$$

Il fatto che il termine generale della serie sia infinitesimo, come abbiamo osservato sopra è una condizione necessaria per la convergenza, ma non sufficiente. Ricorriamo quindi ad uno dei criteri elencati, ad esempio il *criterio del rapporto.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2+x^{6(n+1)}}{(n+1)^4}}{\frac{2+x^{6n}}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + x^{6(n+1)}}{(n+1)^4} \frac{n^4}{2 + x^{6n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + x^{6(n+1)}}{2 + x^{6n}} \frac{n^4}{n^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^4} = 1.$$

Quando applicando il criterio del rapporto (ma anche quello della radice) il limite dà come risultato *1*, si devono utilizzare altri criteri. Infatti può succedere che la serie sia convergente come ad es.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, o divergente come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. In entrambi i casi se si applicano i criteri del rapporto o della radice si ottiene che il limite ha come risultato *1.* Osserviamo che anche il criterio della radice ennesima, applicato alla serie proposta, ha come risultato *1.* Infatti :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2 + x^{6n}}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2 + x^{6n}}}{\sqrt[n]{n^4}} = 1,$$

Perchè: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4} = 1$, mentre dalle maggiorazioni

$$1 < \sqrt[n]{2 + x^{6n}} \leq \sqrt[n]{3},$$

si deduce che: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2 + x^{6n}} = 1$.

Dobbiamo quindi ricorrere ad un altro criterio, ad esempio quello del confronto:

$$\frac{2 + x^{6n}}{n^4} \leq \frac{3}{n^4}$$

La serie che ha come termine generale $a_n = \frac{1}{n^4}$ è convergente, perchè, serie armonica con esponente $\alpha = 4 > 1$. Quindi anche la serie data risulta convergente quando $| x | \leq 1$.

Fila 4. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + x^{8n}}{n^5}.$$

Osserviamo che il limite della successione $\{x^{8n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dipende dal valore assunto da x, più precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} x^{8n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \mid x \mid > 1 \\ 1 & \text{se } x = \pm 1 \\ 0 & \text{se } \mid x \mid < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite del termine generale della serie nel caso in cui $\mid x \mid > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 + x^{8n}}{n^5} = +\infty.$$

Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie (cioè il termine generale deve essere infinitesimo), quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge se $\mid x \mid > 1$.

Se $\mid x \mid \leq 1$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 + x^{8n}}{n^5} = 0.$$

Il fatto che il termine generale della serie sia infinitesimo, come abbiamo osservato sopra è una condizione necessaria per la convergenza, ma non sufficiente. Ricorriamo quindi ad uno dei criteri elencati, ad esempio il *criterio del confronto.*

Poichè $\mid x \mid \leq 1$ possiamo maggiorare il termine generale della serie data nel modo che segue:

$$\frac{3 + x^n}{n^5} \leq \frac{3 + 1}{n^5}$$

Consideriamo la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^5} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}.$$

Questa è una serie armonica con esponente $\alpha = 5 > 1$, quindi è convergente. Per il *criterio del confronto* anche la serie data é convergente.

Fila 2. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n} + 5}{n^2}.$$

Ragionando come negli esercizi precedenti si stabilisce che, se $\mid x \mid > 1$, la serie data è divergente. Consideriamo allora il caso in cui $\mid x \mid \leq$

1. Applichiamo il *criterio del limite* prendendo come serie test: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^{4n}+5}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} x^{4n} + 5 = \begin{cases} 6 & \text{se } x = \pm 1 \\ 5 & \text{se } \mid x \mid < 1 \end{cases}$$

Da cui si deduce che la serie proposta è convergente, perchè ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente, in quanto serie armonica con esponente $\alpha = 2 > 1$.

Fila n.1 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} + 1}{n^3}.$$

Ragionando come negli esercizi precedenti si dimostra che, se $\mid x \mid > 1$, la serie è divergente. Se invece $\mid x \mid \leq 1$, utilizzando il *criterio del confronto* o il *criterio del limite,* si dimostra che la serie è convergente.