Prova scritta del 9/1/2003

Soluzione degli esercizi N.4

Le quattro serie proposte sono a termini positivi. Per studiare la convergenza delle serie a termini positivi è possibile utilizzare uno dei seguenti criteri che abbiamo esposto a lezione:
a) *criterio del confronto,*
b) *criterio della radice,*
c) *criterio del rapporto,*
d) *criterio del limite.*
Svolgiamo ciascun esercizio con un criterio diverso .

Fila 1. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n n^2 + 2^n}$$

A questa serie applichiamo il *criterio del confronto.* Dovendo quindi dimostrare che la serie è convergente si tratterà di maggiorare il termine generale della serie data con il termine generale di una serie convergente. Osserviamo che vale la maggiorazione:

$$\frac{n^3+1}{3^n n^2 + 2^n} \leq \frac{n^4}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}\, \forall n \in \mathbb{N},\, n > k$$ [1]

con $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Il termine generale della serie data è quindi maggiorato (definitivamente) dal termine generale della serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

[1] Come fa a venire in mente questa maggiorazione, direte voi. Basta osservare che il valore di una frazione aumenta se diminuisce il valore del denominatore (prima maggiorazione), mentre un esponenziale è definitivamente maggiore di qualunque potenza (seconda maggiorazione).

che è una serie armonica con esponente $\alpha = 2$, quindi risulta convergente (le serie armoniche $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sono convergenti se $\alpha > 1$.)

Il *criterio del confronto* ci assicura quindi che anche la serie di partenza è convergente.

Fila 2. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^5}{4^n n + 3^n}$$

Applichiamo il *criterio della radice ennesima* : sia $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Quindi dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n^5}{4^n n + 3^n}}$$

al numeratore della frazione sotto radice mettiamo in evidenza n^5, mentre al denominatore mettiamo in evidenza $4^n n$, cioè in entrambi i casi abbiamo messo in evidenza gli infiniti di ordine maggiore:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{4^n n} \frac{\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}{\left(1+\frac{3^n}{4^n n}\right)}} = \tag{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{4\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{3^n}{4^n n}}} = \frac{1}{4} \tag{2}$$

Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n^5}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{3^n}{4^n n}} = 1,$$

perchè: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n n} = 0$.

Concludendo, la serie data è convergente in quanto applicando al suo termine generale il *criterio della radice ennesima* otteniamo che il limite L risulta uguale a $\frac{1}{4}$ che è minore di uno.

Fila 3. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n^2}{2^n+n^2 5^n}$$

Applichiamo il *criterio del rapporto* : sia $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Quindi dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(n+1)^2}{2^{n+1}+(n+1)^2 5^{n+1}}}{\frac{2+n^2}{2^n+n^2 5^n}}$$

Risolviamo il limite proposto mettendo in evidenza gli infiniti di ordine maggiore nella maniera seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 5^{n+1}}}{\frac{n^2}{n^2 5^n}} \frac{\frac{\frac{2}{(n+1)^2}+1}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}+1}}{\frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{2^n}{n^2 5^n}+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} \frac{\frac{\frac{2}{(n+1)^2}+1}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}+1}}{\frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{2^n}{n^2 5^n}+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \frac{\frac{\frac{2}{(n+1)^2}+1}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}+1}}{\frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{2^n}{n^2 5^n}+1}} = \frac{1}{5}$$

Perchè:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 5^n} = 0$$

Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

In quanto $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, essendo $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ se $\mid a \mid < 1$.

Concludendo, la serie data è convergente percè applicando al suo termine generale il *criterio del rapporto* otteniamo che il limite L risulta uguale a $\frac{1}{5}$ che è minore di uno.

Fila 4. Dimostrare che la serie seguente è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+n^4}{4^n + n^3 6^n}$$

Applichiamo il *criterio del limite*: sia

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ [2] , se $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ allora le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè la prima è convergente se e solo se lo è la seconda.

La difficoltà del percorrere questa strada sta nell'individuare una serie giusta con la quale confrontare la serie data.

Osserviamo che al denominatore del termine generale della serie che dobbiamo studiare l'infinito di ordine maggiore è $n^3 6^n$, mentre al numeratore è ovviamente n^4. Di conseguenza, possiamo applicare il *criterio del limite,* considerando come a_n il termine generale della serie data e come

$$b_n = \frac{n^4}{n^3 6^n} = \frac{n}{6^n}.$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3+n^4}{4^n+n^3 6^n}}{\frac{n}{6^n}} =$$

[2]ovviamente deve essere $a_n \geq 0, b_n > 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+n^4}{4^n+n^3 6^n}\ \frac{6^n}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^4}+1}{\frac{4^n}{n^3 6^n}+1}\ \frac{n^4 6^n}{n^4 6^n} = 1$$

Perchè: $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^4} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n^3 6^n} = 0$
(infatti abbiamo già osservato in precedenza che l'esponenziale tende a zero se la base è in valore assoluto minore di uno:
$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$)
Il risultato del limite che abbiamo calcolato è $L = 1$ che è un numero reale non nullo , quindi la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{6^n}$$

Questa risulta convergente , ad esempio, per il *criterio della radice ennesima*:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{6^n}} = \frac{1}{6} < 1.$$

Di conseguenza, in virtù del *criterio del limite* sopra citato, anche la serie data risulta convergente.