Corso di Laurea in FISICA

ANALISI MATEMATICA I e II

Prova scritta del 15 GENNAIO 2013

1) Dimostrare che

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{n+1}, \quad (n = 2,\, 3,\, 4,\, \cdots)$$

Svolgimento

Procediamo per induzione
Se $n = 2$ la diseguaglianza é vera perché assume la forma

$$\binom{4}{2} > \frac{16}{3} \iff 6 > \frac{16}{3} \iff 18 > 16.$$

Dimostriamo l'induttivitá della proposizione, ossia

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{n+1} \Longrightarrow \binom{2n+2}{n+1} > \frac{2^{2(n+1)}}{n+2}.$$

Consideriamo quindi il primo membro della seconda diseguaglianza.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{(2n)!2(2n+1)}{n!n!(n+1)} = \binom{2n}{n}\frac{2(2n+1)}{n+1} >$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$> \frac{2^{2n}}{n+1}\,\frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

La tesi ́dimostrata se proviamo che

$$\frac{2^{2n}}{n+1}\,\frac{2(2n+1)}{n+1} > \frac{2^{2n+2}}{n+2}$$

Ovvero

$$(2n+1)(n+2) > 2(n+1)^2 \iff n > 0.$$

Che é vera per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus 0$.
2) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1 - \sqrt[3]{x}$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento

Il campo di esitenza della funzione é tutto $\mathbb{R}$ perché le radici cubiche sono definite su tutto il campo reale.
Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right] =$$

$$\text{applichiamo lo sviluppo di Taylor: } \sqrt[3]{1+t} = 1+\frac{1}{3}t+o(t), \text{ con } t=\frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x}\left[1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right] =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\, o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = -1.$$

La funzione ammette un asintoto orizzontale di equazione $y=-1$.
Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right].$$

Osserviamo che la derivata prima é positiva per i valori della variabile x per i quali si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

ovvero

$$\sqrt[3]{x^2} > \sqrt[3]{(1+x)^2} \iff x^2 > (1+x)^2 \iff -1 > 2x \iff x < -\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Di conseguenza la derivata prima é positiva per $x < -\frac{1}{2}$ e negativa per $x > -\frac{1}{2}$. Da questo deduciamo che
f é crescente sugli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(-1-\frac{1}{2})$, mentre é decrescente su $(-\frac{1}{2},0)$ e $(0,+\infty)$.
Quindi il punto $x=-1$ é di massimo assoluto.
Nei punti $x=-1$ e $x=0$ si ha che La derivata é rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.
Calcolo f'':

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right].$$

Osserviamo che la derivata seconda é positiva per i valori della variabile x per i quali si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},$$

ovvero

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^5} < \sqrt[3]{(1+x)^5} \\ x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{x^5} > \sqrt[3]{(1+x)^5} \\ x<0 \\ x+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{x^5} < \sqrt[3]{(1+x)^5} \\ x<0 \\ x+1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{x^5} > \sqrt[3]{(1+x)^5} \\ x>0 \\ x+1<0 \end{cases}$$

Da cui, elevando entrambi i membri delle prime equazioni dei sistemi a $\frac{3}{5}$, otteniamo

$$\begin{cases} x < 1 + x \\ x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 + x \\ x < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 + x \\ x < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 + x \\ x > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $x < -1$ oppure $x > 0$.
Di conseguenza la derivata seconda é positiva per $x < -1$ o $x > 0$ e negativa per $-1 < x < 0$.
Da questo deduciamo che
f é convessa sugli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$, mentre é concava su $(-1, 0)$.
Possiamo ora tracciare un grafico approssimato della funzione.

(3) Calcolare il valore del seguente integrale.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \cos x \, dx.$$

Svolgimento.

L'integrale da calcolare é un integrae improprio dato che la funzione presenta una singolaritá nel punto $x = \frac{\pi}{6}$. Pertanto dobbiamo calcolare

$$\lim_{c \longrightarrow \frac{\pi}{6}-} \int_0^{c} \log\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \cos x \, dx. \tag{2}$$

Per prima cosa procediamo al calcolo dell'intergrale indefinito mediante la sostituzione $t = \sin x$, quindi $dt = \cos x \, dx$, e poi intergazione per parti. L'integrale

$$\int \log\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \cos x \, dx$$

diventa

$$\int \log\left(\frac{1}{2} - t\right) dt = t \log(\frac{1}{2} - t) + \int \frac{t}{\frac{1}{2} - t} \, dt =$$

$$= t \log(\frac{1}{2} - t) + \int \frac{t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \, dt = t \log(\frac{1}{2} - t) + \int (-1) \, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{1}{2} - t} \, dt =$$

$$= t \log\left(\frac{1}{2} - t\right) - t - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2} - t\right) + C.$$

$$\int \log\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \cos x \, dx = \sin x \log\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) - \sin x - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) + C.$$

Sostituendo in (2)

$$\lim_{c\longrightarrow\frac{\pi}{6}-}\int_0^c \log\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\ \cos x\ \ dx =$$

$$= \lim_{c\longrightarrow\frac{\pi}{6}-}\left(\sin c-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{1}{2}-\sin c\right)-\sin c-\frac{1}{2}\log 2 =$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2.$$

(4) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+4}{n^4+1}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^n.$$

Svolgimento.

Poniamo $y=\frac{x-2}{x+2}$ riconducendoci allo studio della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+4}{n^4+1}\,y^n.$$

Si tratta di una serie di potenze con centro $y=0$. Il suo raggio di convergenza é dato dal limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n^3+4}{n^4+1}}}=1.$$

Quindi la serie converge puntualmente sull'intervallo $-1<y<1$. Studiamo il suo comportamento agli estremi. Per $y=1$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+4}{n^4+1}.$$

Questa diverge perché il suo termine generale é minorato dal termine generale della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n},$$

che é una serie divergente. Se $y=-1$. Otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+4}{n^4+1}\,(-1)^n.$$

Il criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno ci consente di stabilire che questa converge in quanto il fattore $a_n=\frac{n^3+4}{n^4+1}$ é decrescente ed infinitesimo.

In definitiva la serie converge puntualmente su $[-1,1)$ e uniformemente su $[-1,\delta]$, con $\delta \in (0,1)$.
Passiamo al parametro x risolvendo la disequazione

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 1,$$

le cui soluzioni sono $x > 0$. tenuto conto della relazione tra x e y possiamo concludere che la serie converge puntualmente per $x \geq 0$ e uniformemente su $[0,\delta]$, per ogni $\delta > 0$.