Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 19 Luglio 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$(n+1)\,(2^n - 1) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} k\; 2^k, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; -2\,x \;+\log\left(1 \;+\; e^{4x}\right),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \;-\; \sin x)\;\; \arcsin\left(\frac{\sin x \;+\; \cos x}{2}\right)\;\; dx.$$

Soluzioni degli esercizi proposti.
1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$(n+1)\,(2^n-1) \;\le\; \sum_{k=1}^{n} k\;2^k, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Svolgimento

Dimostriamo per induzione.
Per $n = 1$: $(1+1)(2^1-1) \le 1\,\cdot\,2^1$, ovvero $2 \le 2$.
Dimostriamo che la proposizione è induttiva, ossia:

$$(n+1)\,(2^n-1) \;\le\; \sum_{k=1}^{n} k\;2^k \;\Longrightarrow\; (n+2)\,(2^{n+1}-1) \;\le\; \sum_{k=1}^{n+1} k\;2^k$$

Sviluppando la sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\;2^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\;2^k \;+\; (n+1)2^{n+1} \;\ge$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\ge\; (n+1)(2^n-1) \;+\; (n+1)\,2^{n+1}.$$

Otteniamo la tesi provando la seguente diseguaglianza:

$$(n+1)(2^n-1) \;+\; (n+1)\,2^{n+1} \;\;\ge\;\; (n+2)\,(2^{n+1}-1),$$

che ` equivalente alla seguente

$$n\,2^n + 2^n - n - 1 + 2^{n+1}\,n \;+\; 2^{n+1} \;\ge\; n\,2^{n+1} \;+\; 2\,2^{n+1} \;-\; n \;-\; 2.$$

Semplificando

$$1 + n\,2^n \;+\; 2^n \;+\; 2^{n+1} \;\ge\; 2\,2^{n+1} \;\Longleftrightarrow\; 1 + n\,2^n \;+\; 2^n \;\ge\; 2\;2^n \;\;\Longleftrightarrow\; 1 + n\;2^n \;\ge\; 2^n.$$

Che è vera per ogni n.

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; -2\,x \;+\; \log\left(1 \;+\; e^{4x}\right),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esistenza di f è tutto $\mathbb{R}$.
Esaminiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

perché

$$\lim_{x\to-\infty} e^{4x} = 0.$$

Mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2\,x \ + \log\left(1 \,+\, e^{4x}\right) = \lim_{x\to+\infty} -2\,x \,+\, \log\left[e^{4x}\left(e^{-4x}+1\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} -2\,x \,+\, \log e^{4x} \,+\, \log\left(e^{-4x}+1\right) = \lim_{x\to+\infty} -2\,x \,+\, 4x \,+\, \log\left(e^{-4x}+1\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x \,+\, \log\left(e^{-4x}+1\right) = +\infty.$$

Determiniamo l'eventuale asintoto a $-\infty$.

$$m \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to-\infty} -2 \,+\, \frac{\log\left(1+e^{4x}\right)}{x} = -2,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) \,+\, 2x = \lim_{x\to-\infty} \log\left(1+e^{4x}\right) = 0.$$

Asintoto per x che tende a meno infinito è la retta di equazione

$$y \;=\; -2\,x.$$

Determiniamo l'eventuale asintoto a $+\infty$, scomponendo l'argomento del logaritmo nel modo fatto sopra.

$$m \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} -2 \,+\, 4 + \frac{\log\left(e^{-4x}+1\right)}{x} = 2,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) \,-\, 2x = \lim_{x\to+\infty} -4 \,+\, 4 \,+ \log\left(e^{-4x}+1\right) = 0.$$

Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) \;=\; -2 \;+\; \frac{4\,e^{4x}}{1+e^{4x}} \;\Longleftrightarrow\; f'(x) \;=\; \frac{2(e^{4x}\;-\;1)}{1+e^{4x}}.$$

Studiamo il segno di f' e quindi la monotonia di f.

$$f'(x) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{4x}-1\;>\;0 \quad\Longleftrightarrow\quad x>0.$$

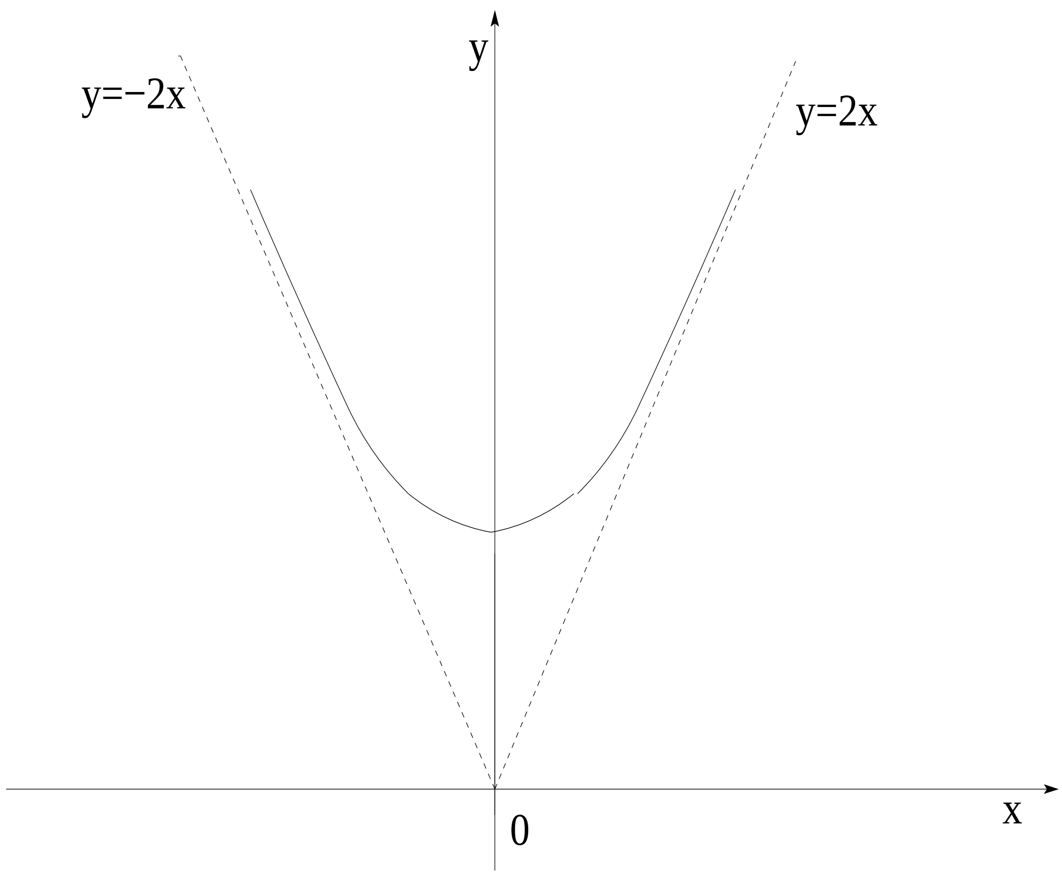
$$f'(x) < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{4x}-1\;<\;0 \quad\Longleftrightarrow\quad x<0.$$

$$f'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{4x}-1\;=\;0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=0.$$

Da queste deduxciamo che la funzione cresce su $(0,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,0)$. Il punto $x=0$ è di minimo.
Calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) \;=\; \frac{16\,e^{4x}}{(1\;+\;e^{4x})^2}$$

Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f''(x) > 0$. Quindi la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
Possiamo traccia il grafico approssimato della funzione.



(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \; - \; \sin x) \;\; \arcsin\left(\frac{\sin x \;\; + \;\; \cos x}{2}\right) \;\; dx.$$

Svolgimento.

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile:

$$t \; = \; \frac{\sin x \; + \; \cos x}{2}, \quad \text{da cui} \quad dt \; = \; \frac{\cos x \; - \; \sin x}{2} \;\; dx.$$

Inoltre se $x = 0$ si ha che $t = \frac{1}{2}$, mentre se $x = \frac{\pi}{4}$ risulta $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sostituendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \; - \; \sin x) \;\; \arcsin\left(\frac{\sin x \;\; + \;\; \cos x}{2}\right) \;\; dx \; = \; 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin t \;\; dt.$$

Integrando per parti:

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin t \;\; dt \; = \; 2[t \;\; \arcsin t]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \; - \; 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \;\; dt \; =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \; - \; \frac{\pi}{6} \; + \; [\sqrt{1-t^2}]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \; = \; \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \; - \; \frac{\pi}{6} \; + \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$