Compito di Analisi Matematica I del 22 gennaio 2013

Corso di Laurea in Fisica A. a. 2012/13

Risoluzione degli esercizi proposti.

1) Dato un numero intero $n > 0$, determinare i numeri complessi z tali che

$$|z|^n + |z| = \sqrt{2}(1-i)\, z. \tag{1}$$

Svolgimento Osserviamo che $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo quindi soluzioni non nulle. Per questo, come prima cosa, determiniamo il modulo di z dall'equazione:

$$|z|^n + |z| = |\sqrt{2}(1-i)\, z| \iff |z|^n + |z| = \sqrt{2}|1-i|\,|z| \iff |z|^n + |z| = 2|z|.$$

Da cui, se $n > 1$, essendo $z \neq 0$, possiamo dividere per $|z|$ ed ottenere

$$|z|^{n-1} + 1 = 2 \iff |z| = 1.$$

Sostituendo nell'equazione (1) si ottiene

$$2 = \sqrt{2}(1-i)\, z \iff z = \frac{2}{\sqrt{2}(1-i)} = \frac{2(1+i)}{\sqrt{2}(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{\sqrt{2}2}.$$

Da cui

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si può anche risolvere ricorrendo alla forma trigonometrica, ma il procedimento risulta più lungo. Lo riporto quui sotto per mettere in evidenza la differenza tra le due strade. Scriviamo z ed il numero $1-i$ nella forma trigonometrica

$$z = \cos\theta + i\,\sin\theta, \quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

l'equazione (1) diventa

$$1^n + 1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}\right)(\cos\theta + i\,\sin\theta),$$

ovvero

$$1 = \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}\right)(\cos\theta + i\,\sin\theta) \iff 1 = \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + \theta\right) + i\,\sin\left(\frac{7\pi}{4} + \theta\right)\right].$$

Abbiamo ottenuto un'eguaglianza tra due numeri complessi. Dato che il numero al primo membro ha la parte immaginaria nulla si deve avere che anche quello al secondo deve avere parte immaginaria nulla, ovvero

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4} + \theta\right) = 0 \iff \frac{7\pi}{4} + \theta = k2\pi \iff \theta = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

In definitiva, se $n > 1$, le soluzioni dell'equazione (1) sono tutti i numeri del tipo

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Consideriamo il caso $n = 1$. Posto $z = x + iy$, l'equazione (1) diventa

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}(1 - i)(x + iy) \iff 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}(x + iy - ix + y)$$

Eguagliando parte reale con parte reale e parte immaginaria con parte immaginaria otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}(x + y) \\ \\ y = x \end{cases} , \tag{2}$$

che risolto fornisce l'equazione $|x| = x$, le cui soluzioni sono tutti i numeri reali positivi. In definitiva, se $n = 1$, le soluzioni sono

$$z \ = \ x\,(1 + i), \quad \text{per ogni reale } x > 0.$$

2) Dimostrare che

$$\binom{2n}{n} < \frac{(2n+2)^n}{(n+1)!}, \qquad (n \ = \ 3,\, 4,\, 5 \cdots)$$

Svolgimento
Procediamo per induzione. Per $n = 3$ si ha

$$\binom{6}{3} < \frac{8^3}{4!} \iff 20 < \frac{64}{3},$$

che è verificata.
Dimostriamo l'induttività della proposizione, ovvero

$$\binom{2n}{n} < \frac{(2n+2)^n}{(n+1)!} \Longrightarrow \binom{2n+2}{n+1} < \frac{(2n+4)^{n+1}}{(n+2)!}, \qquad (n \ = \ 3,\, 4,\, 5 \cdots)$$

Iniziamo maggiorado il primo membro

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^2(n+1)^2} = \binom{2n}{n}\frac{2(2n+1)}{n+1} <$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$< \frac{(2n+2)^n}{(n+1)!}\,\frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

La tesi è dimostrata se verifichiamo che

$$\frac{(2n+2)^n}{(n+1)!}\,\frac{2(2n+1)}{n+1} < \frac{(2n+4)^{n+1}}{(n+2)!}.$$

Semplificando

$$\frac{2n+1}{n+1} < \frac{(n+2)^n}{(n+1)^n},$$

ovvero

$$\frac{2n+1}{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \tag{3}$$

Per la diseguaglianza di Bernoulli si ha (3)

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

3) Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 \ = \ \alpha \\ \\ a_{n+1} \ = \ \dfrac{11\,a_n \ + \ 4}{a_n \ + \ 8}. \end{cases} \tag{4}$$

e calcolarne il limite.

Svolgimento.

La successione è ben definita perchè tutti i termini sono positivi e quindi il denominatore della frazione non si annulla mai. Infatti, per induzione, a_1 è positivo, poi se $a_n > 0$ allora è evidente che anche $a_{n+1} > 0$.
Determiniamo i valori di α per i quali si verifica che $a_2 > a_1$ o viceversa.

$$a_2 \ = \ \frac{11\,a_n \ + \ 4}{a_n \ + \ 8} \ > \ \alpha \ = \ a_1 \iff \alpha^2 \ - \ 3\,\alpha \ - \ 4 \ < 0.$$

Dato che le radici dell'equazione sono $a_1 = -1$ e $a_2 = 4$, possiamo affermare che $a_2 > a_1$ se $0 < \alpha < 4$.
Con identico procedimento si stabilisce anche $a_2 = a_1$ se $\alpha = 4$ e $a_2 < a_1$ se $\alpha > 4$.
Per studiare la monotonia studiamo la monotonia della funzione associata, ovvero

$$f(x) = \frac{11\,x \ + \ 4}{x \ + \ 8},$$

per i valori di $x > 0$. Si vede facilmente che $0 < x_1 < x_2$ implica che $f(x_1) < f(x_2)$. Tornando alla succecssione, dimostriamo per induzione la monotonia.

Sia $0 < \alpha < 4$. Verifichiamo che la successione è monotona crescente. Infatti, per quanto visto sopra risulta che $a_2 > a_1$. L'induttività $a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_n < a_{n+1}$ segue dal fatto che la funzione f è monotona crescente e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_n = f(a_{n-1}) < a_{n+1} = f(a_n).$$

Inoltre la successione è limitata superiormente da 4. Per induzione. Il primo passo è $a_1 < 4$. Poi se $a_n < 4$ allora $a_{n+1} < 4$. Infatti

$$a_{n+1} = \frac{11\,a_n\, +\, 4}{a_n\, +\, 8} < 4 \iff 11\,a_n\, +\, 4 < 4a_n\, +\, 32 \iff a_n < 4.$$

Per il teroema di regolarità delle successioni monotone esiste ed è reale il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Determiniamo L passando al limite nella successione ricorsiva che definisce $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed otteniamo:

$$L\, =\, \frac{11\,L\, +\, 4}{L\, +\, 8} \iff L^2 - 3L - 4 = 0$$

Le radici sono $L_1 = -1$ e $L_2 = 4$. L_1 si scarta perché non è punto di accumulazione della successione e quindi il limite cercato è $L_2 = 4$, nel caso che $0 < \alpha < 4$.
Se $\alpha = 4$ la successione è costante $a_n = 4$ per ogni n, (si vede banalmente per induzione) quindi il suo limite è 4.
Se $\alpha > 4$ con lo stesso ragionamento a quello visto sopra si dimostra che la successione è decrescente. Infatti per quanto dimostrato in precedenza $a_2 < a_1$. L'induttività segue dalla monotonia di f. Per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n-1} > a_n \Longrightarrow a_n = f(a_{n-1}) > a_{n+1} = f(a_n).$$

Inoltre la successione è limitata inferiormente perché come abbiamo visto è a termini positivi. Si può però anche dimostare che è maggiore di 4, ragionando come abbiamo fatto in precedenza per verificare che nel caso che $\alpha < 4$ risulta $a_n < 4$. Passando al limite nella successione ricorsiva otteniamo come sopra i valori $L_1 = -1$ e $L_2 = 4$. L_1 si scarta perché non è punto di accumulazione della successione e quindi il limite cercato è $L_2 = 4$, anche nel caso che $\alpha > 4$.