ESERCIZIO

Dimostrare che
$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sin\ n\ =\ 1, \quad \inf_{n\in\mathbb{Z}} \sin\ n\ = -1.$$

Suggerimento (I) Basta provare per $n \in \mathbb{N}$. Osservare che sin n é ″vicino″ a 1 se n é vicino ad un opportuno multiplo di $\frac{\pi}{2}$.

Suggerimento (II).
La ″vicinanza″ tra n e l'opportuno multiplo di $\frac{\pi}{2}$ puó essere espressa dalla maggiorazione
$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nk}.$$

SVOLGIMENTO.

Passo I

Basta provare che
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sin n\ =\ 1,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \sin n\ =\ -1.$$

Infatti
$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sin\ n\ =\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sin n \vee \sup_{n\in\mathbb{N}} \sin\ (-n).$$

Perché $\sin(-n)\ =\ -\ \sin n$, e quindi $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sin\ (-n) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} -\sin\ n = -\inf_{n\in\mathbb{N}} \sin\ n\ =\ 1$.
L'ultimo passaggio segue dal seguente esercizio.

Esercizio

Se é A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato, allora vale
$$\sup(-A)\ =\ -\inf\ A,$$
dove $-A = \{-a :\ a \in A\}$.

Svolgimento

Per definizione di estremo inferiore

(1) $\forall a \in A :\ \inf\ A \leq a\ \iff\ -a \leq -\inf\ A$;

(2) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\overline{a} \in A$ tale che $\overline{a} - \varepsilon < \inf\ A\ \iff\ -\overline{a} > -\inf\ A\ -\ \varepsilon$

Da (1) segue che $-\inf A$ é un maggiorante di $-A$, mentre da (2) che é il minimo dei maggioranti di $-A$. Da questo la tesi.

Passo II.

Dimostriamo che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sin\ n\ = 1$. Questo equivale a provare che

(i) $\forall n \in \mathbb{N} :\ \sin n \leq 1$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \varepsilon < \sin \overline{n}$, ovvero $1 - \sin \overline{n} < \varepsilon$.

(i) é ovvia per la definizione di sin. Per verificare (ii) osserviamo che possiamo scrivere

$$1 \, = \, \sin \left[(4h+1)\frac{\pi}{2} \right] , \;\; h \in \mathbb{N}.$$

in quanto

$$\sin \left[(2h+1)\frac{\pi}{2} \right] = (-1)^h, \;\; h \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza dimostrare (ii) equivale a

$$\sin \left[(4h+1)\frac{\pi}{2} \right] \; - \; \sin \, \overline{n} \; < \; \varepsilon.$$

Dalle formule di prostaferesi, essendo $|\sin \alpha| < |\alpha|$, segue

$$\begin{aligned} &\left| \sin \left[(4h+1)\frac{\pi}{2} \right] - \sin \, \overline{n} \right| = \left| 2 \, \sin \left\{ \frac{1}{2} \left[(4h+1)\frac{\pi}{2} \, - \, \overline{n} \right] \right\} \cos \left\{ \frac{1}{2} \left[(4h+1)\frac{\pi}{2} \, + \, \overline{n} \right] \right\} \right| \leq \\ &\leq \left| (4h+1)\frac{\pi}{2} \, - \, \overline{n} \right| . \end{aligned} \tag{1}$$

Per provare la tesi si tratta quindi di provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\overline{n}$ ed h tali che

$$\left| (4h+1)\frac{\pi}{2} \, - \, \overline{n} \right| \, < \, \varepsilon.$$

Questa diseguaglianza è conseguenza della seguente.

Esercizio.

Sia $\alpha > 0$ un numero irrazionale. Per ogni intero k, positivo, esistono m, $n \in \mathbb{N}$, con $1 \leq n \leq k$ tali che

$$\left| \alpha \, - \, \frac{m}{n} \right| \, < \, \frac{1}{nk}. \tag{2}$$

Svolgimento.

Possiamo scrivere le seguenti eguaglianze.

$$\begin{aligned} &\alpha \, = \, [\alpha] \, + \, \beta_1 \, = \, \alpha_1 \, + \, \beta_1 \\ &2\,\alpha \, = \, [2\,\alpha] \, + \, \beta_2 \, = \, \alpha_2 \, + \, \beta_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &k\,\alpha \, = \, [k\,\alpha] \, + \, \beta_k \, = \, \alpha_k \, + \, \beta_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Dove $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, mentre $\beta_1, \cdots, \beta_n \in (0,1)$.
Consideriamo ora gli intervalli

$$I_1 = \left(0, \frac{1}{k}\right), \; I_2 = \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right), \; \cdots, I_k = \left(\frac{k-1}{k}, 1\right). \tag{4}$$

Ovviamente i termini β_i, $i = 1, \cdots, k$ sono diversi da $\frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}$, in quanto sono irrazionali, perché $\beta_1 = \alpha - \alpha_i$ e $\alpha_i \in \mathbb{N}$.
Si possono avere due casi.
I Caso. I_1 contiene almeno un β_n, allora

$$\beta_n = n\,\alpha \, - \, \alpha_n \in \left(0, \frac{1}{k}\right),$$

da cui

$$-\frac{1}{k} \, < \, n\alpha \, - \, \alpha_n \, < \, \frac{1}{k},$$

ovvero

$$-\frac{1}{nk} \, < \, \alpha \, - \, \frac{\alpha_n}{n} \, < \, \frac{1}{nk}.$$

Da questa segue la tesi ponendo

$$\frac{\alpha_n}{n} \, = \, \frac{m}{n}.$$

II Caso. Supponiamo invece che nessun β_n appartenga a I_1. In tal caso i termini β_n, che sono k, apparterranno agli intervalli $I_2, \cdots, I_k$ che sono $k-1$. Quindi uno di questi intervalli dovrá contenere almeno due β_n. Supponiamo ad esempio che β_j e β_r (con $1 \leq r < j \leq k$) appartengano allo stesso intervallo, che ricordiamo ha ampiezza $\frac{1}{k}$, e quindi

$$-\frac{1}{k} < \beta_j \, - \, \beta_r < \frac{1}{k}.$$

Da (3) segue

$$-\frac{1}{k} < (j\alpha - \alpha_j) \, - \, (r\alpha - \alpha_r) < \frac{1}{k} \iff -\frac{1}{k} < (j \, - \, r)\alpha \, - \, (\alpha_j \, - \, \alpha_r) < \frac{1}{k}.$$

Posto $j - r = n$ e $\alpha_j - \alpha_r = m$ otteniamo

$$-\frac{1}{k} \, < \, n\,\alpha \, - \, m \, < \, \frac{1}{k} \iff \left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nk}.$$