Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 13 Settembre 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

(1) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^6 - 12} \end{cases}$$

(**2**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log(\cos 2x) - \log(\cos x)}{\cos 5x - \cos 4x}$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = x + \log\left(1 + \frac{4}{x}\right)$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^1 e^x \log(1 + e^{2x}) \, dx.$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

(1) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^6 - 12} \end{cases}$$

Svolgimento.

La successione è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre è a termini positivi dato che $a_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo questo per induzione. Infatti il primo passo è banalmente verificato. Proviamo l'induttività. $a_n \geq 2$ implica $a_{n+1} \geq 2$.
Questa segue dalla seguente osservazione

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^6 - 12} \geq 2 \iff a_n^6 - 12 \geq 8 \iff a_n \geq \sqrt[6]{20}$$

che è verificata perché $2 > \sqrt[6]{20}$ e per ipotesi $a_n \geq 2$.
Proviamo che la successione è monotona crescente per induzione.
Osserviamo che $a_1 = \sqrt[3]{52} > 2 = a_0$.
Verifichiamo l'induttività: $a_n > a_{n-1}$ implica $a_{n+1} > a_n$.
Infatti

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^6 - 12} > \sqrt[3]{a_{n-1}^6 - 12} = a_n \iff a_n^6 - 12 > a_{n-1}^6 - 12 \iff$$

$$\iff a_n^6 > a_{n-1}^6 \iff a_n > a_{n-1},$$

che è verificata per l'ipotesi induttiva. Si noti che l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
La successione ammette limite L per il teorema di regolarità delle successioni monotone. Calcoliamo il valore di L passando al limite nella successione ricorsiva.

$$L = \sqrt[3]{L^6 - 12} \iff L^3 = L^6 - 12 \iff L^6 - L^3 - 12 = 0.$$

Posto $x = L^3$ ci siamo ricondotti a risolvere l'equazione $x^2 - x - 12 = 0$
che ha soluzioni $x_{1,2} = \{4, -3\}$, ovvero $L_{1,2} = \{-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}\}$ Nessuno di questi due valori è accettabile dato che la successione è monotona crescente ed è maggiore di 2, mentre $L_1 < 2$ e $L_2 < 2$. Quindi il limite è $+\infty$.

(**2**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log(\cos 2x) \; - \; \log(\cos x)}{\cos 5x \; - \; \cos 4x}$$

Svolgimento.

Consideriamo i seguenti sviluppi di Taylor.

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(\cos 2x) - \log(\cos x) = \log(1 - 2x^2 + o(x^2)) \; - \; \log(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) =$$

$$= -2x^2 + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos 5x = 1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos 4x = 1 - 8x^2 + o(x^2)$$

Sostituendo nell'espressione del limite ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2}{-\frac{9}{2}x^2} = \frac{1}{3}.$$

(3) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) \; = \; x \; + \; \log\left(1 \; + \; \frac{4}{x}\right)$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Campo di esistenza: $1 + \dfrac{4}{x} > 0$ ovvero

$$\begin{cases} x > -4 \\ x > 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x < -4 \\ x < 0 \end{cases}$$

Da cui C.E.$= (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.
Segno di f.

Tenuto conto di questo possiamo osservare che $f(x) > 0$ se e solo se $x > -\log\left(1+\frac{4}{x}\right)$ ovvero per ogni $x > 0$. Infatti il *logaritmo* è positivo essendo il suo argomento maggiore di uno. Nello stesso modo si stabilisce che $f(x) < 0$ se $x < -4$.
Comportamento agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-4-} f(x) = -\infty.$$

La retta $x = -4$ è un asintoto verticale per la funzione.
Eventuali asintoti obliqui del tipo $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0.$$

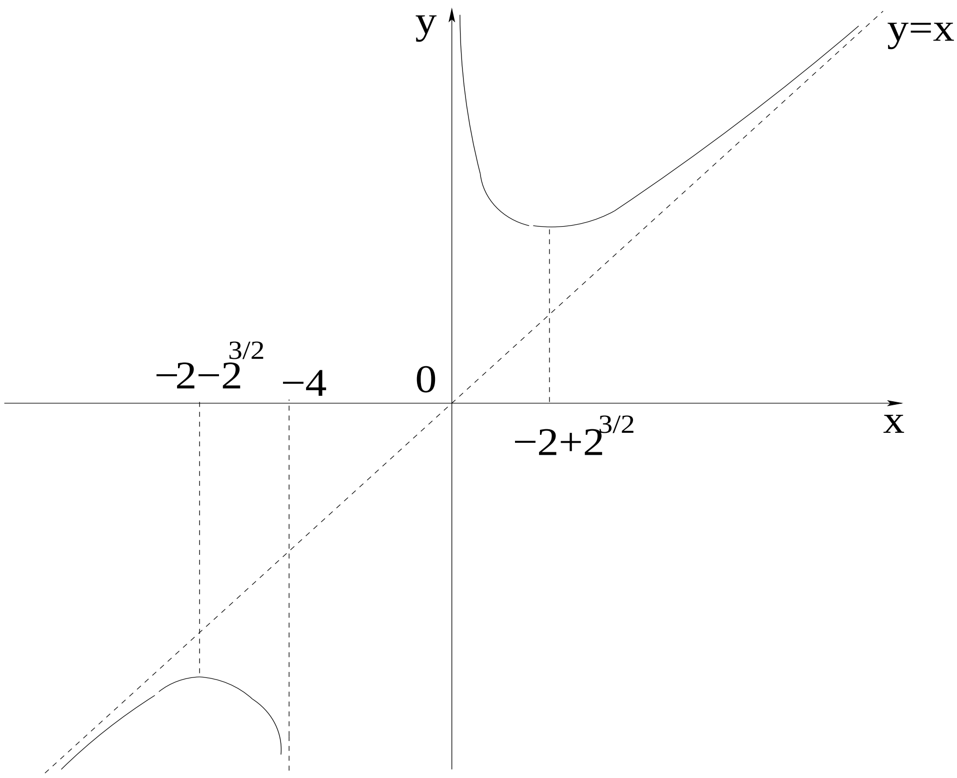
La retta $y = x$ è un asintoto obliquo per f.
Intervalli di monotonia, calcolo della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{x^2+4x-4}{x(x+4)}.$$

Da cui $f'(x) > 0$ se $x^2 + 4x - 4 > 0$, da cui $x < -2-2\sqrt{2}$ oppure $x > 2\sqrt{2}-2$. Da questi risultati si deduce che la funzione è monotona crescente sugli intervalli $(-\infty, -2-2\sqrt{2})$ e $(2\sqrt{2}-2, +\infty)$. Mentre decresce su $(-2-2\sqrt{2}, -4)$ e $(0, 2\sqrt{2}-2)$. Il punto $x_1 = -2-2\sqrt{2}$ è di massimo relativo, mentre $x_2 = 2\sqrt{2}-2$ è di minimo relativo.
Derivata seconda per determinare intervalli di concavità e convessità della funzione.

$$f''(x) = \frac{8(x+2)}{(x^2+4x)^2}.$$

$f'' > 0$ se $x + 2 > 0$ ovvero $x > -2$, $f'' < 0$ se $x + 2 < 0$ ovvero $x < -2$.
Possiamo concludere affermando che f è convessa sull'intervallo $(0, +\infty)$, concava su $(-\infty, -4)$.
tenuto conto di quato trovato possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



(4) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^1 e^x \ \log(1 \ + \ e^{2x}) \ \ dx.$$

Svolgimento.

Effettuiamo il seguente cambio di variabile: $t = e^x$, quindi $dt = e^x\,dx$, da cui per $x = 0$, $t = 1$, mentre per $x = 1$, $t = e$. Tenuto conto di questo, possiamo scrivere

$$\int_0^1 e^x \ \log(1 \ + \ e^{2x}) \ \ dx = \int_1^e \log(1 \ + \ t^2) \ \ dt =$$

(integriamo per parti)

$$= \big[t \ \log(1+t^2)\big]_1^e - \int_1^e \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = e\log(1+e^2) - \log 2 - 2\int_1^e \frac{t^2+1}{1+t^2} \ \ dt + 2\int_1^e \frac{1}{1+t^2} \ \ dt =$$

$$= \log\frac{(1+e^2)^e}{2} \ - \ 2\int_1^e 1 \ dt \ + \ 2[\arctan t]_1^e = \log\frac{(1+e^2)^e}{2} \ - \ 2\,[t]_1^e + 2\arctan e - 2\arctan 1 =$$

$$= \log\frac{(1+e^2)^e}{2} - 2e + 2 + 2\arctan e - \frac{\pi}{2}.$$