Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 19 Luglio 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Dimostrare per induzione la seguente identità:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{9}{2}\, 10^k \; - \; 4 \cdot 5^k \right) \; = \; (2^n \; - \; 1)\, 5^{n+1}.$$

2) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \; \frac{\cos x^2 \; - \; e^{-\frac{x^2}{2}}}{[\log(1 + x^2) \; - \; \sin x^2]^2}$$

3) Data la funzione

$$f(x) \; = \; e^{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\, x},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} \; x^9 \;\; \cos x^5 \;\; dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1) Dimostrare per induzione la seguente identità:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{9}{2}\, 10^k \,-\, 4 \,\cdot\, 5^k \right) \,=\, (2^n \,-\, 1)\, 5^{n+1}.$$

Svolgimento.

Procediamo per induzione.
Per $k = 1$ risulta

$$\frac{9}{2} \cdot 10 \,-\, 4 \cdot 5 \,=\, (2-1)25$$

che è banalmente vera.
Verifichiamo l'induttività della proposizione.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{9}{2}\, 10^k \,-\, 4 \,\cdot\, 5^k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{9}{2}\, 10^k \,-\, 4 \,\cdot\, 5^k \right) \,+\, \frac{9}{2}\, 10^{n+1} \,-\, 4 \,\cdot\, 5^{n+1} \,=$$

(per l'ipostesi induttiva)

$$= \,(2^n \,-\, 1)\, 5^{n+1} \,+\, \frac{9}{2}\, 2^{n+1} \,\cdot\, 5^{n+1} \,-\, 4 \cdot 5^{n+1} \,=\, 5^{n+1}\, (2^n - 1 + 9 \cdot 2^n - 4) \,=$$

$$= \,5^{n+1}\, (10 \cdot 2^n - 5) \,=\, 5^{n+1}\, 5\, (2 \,\cdot\, 2^n \,-\, 1) \,=\, 5^{n+2}\, (2^{n+1} - 1).$$

2) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2 \,-\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{[\log(1 + x^2) \,-\, \sin x^2]^2}$$

Svolgimento.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor di ciascuna delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\cos x^2 \,=\, 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{1}{24}\, x^8 \,+\, o(x^8)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} \,+\, \frac{x^4}{8} \,+\, o(x^8)$$

$$\cos x^2 \,-\, e^{-\frac{x^2}{2}} \,=\, \frac{1}{2}\, x^2 \,+\, o(x^2).$$

$$\log(1+x^2) \;=\; x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$[\log(1+x^2) \;-\; \sin x^2]^2 = \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]^2 =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right]^2 \;=\; \frac{x^8}{4} \;+\; o(x^8).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2 \;+\; o(x^2)}{\frac{x^8}{4} \;+\; o(x^8)} \;=$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{\frac{x^8}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^6} \;=\; +\infty$$

Nello stesso modo si poteva procedere ponendo fin dall'inizio $t = x^2$ e considerando il limite

$$\lim_{t\to 0} \;\frac{\cos t \;-\; e^{-\frac{t}{2}}}{[\log(1+t) \;-\; \sin t]^2}$$

3) Data la funzione

$$f(x) \;=\; e^{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\,x},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è tutto l'insieme dei reali, mentre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $f(x) > 0$.
Limiti agli estremi del campo di esistenza.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \to +\infty \\ \\ +\infty & \text{per} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Perché

$$\lim_{\to+\infty} \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\,x = \lim_{\to\pm\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}\right) = \mp\infty,$$

e per la continuità della funzione $x \to e^x$, formalmente risulta: $e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$.
Ricerca di asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \to +\infty \\ \\ +\infty & \text{per} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Perché l'esponenziale è un infinito più forte di ogni potenza di x.
Calcolo degli intervalli di monotonia mediante lo studio del segno della derivata prima.

$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x} \; \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0 \iff 1 \geq \sqrt[3]{x^2} \iff 1 \geq x^2 \iff x^2 - 1 \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Di conseguenza si ha che
f è crescente sugli intervalli $(-1, 0)$, $(0, 1)$, decrescente su $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, per cui il punto $x_0 = -1$ è di minimo relativo, $x_1 = 1$ è di massimo relativo. Nel punto $x_2 = 0$ la tangente al grafico di f è verticale. Infatti

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty.$$

Pur non essendo richiesto dal testo, calcoliamo la derivata seconda per avere un'idea del comportamento della funzione all'infinito (concava o convessa).

$$f''(x) = e^{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x} \left[\frac{(1 - \sqrt[3]{x^2})^2}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\right].$$

Essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = +\infty,$$

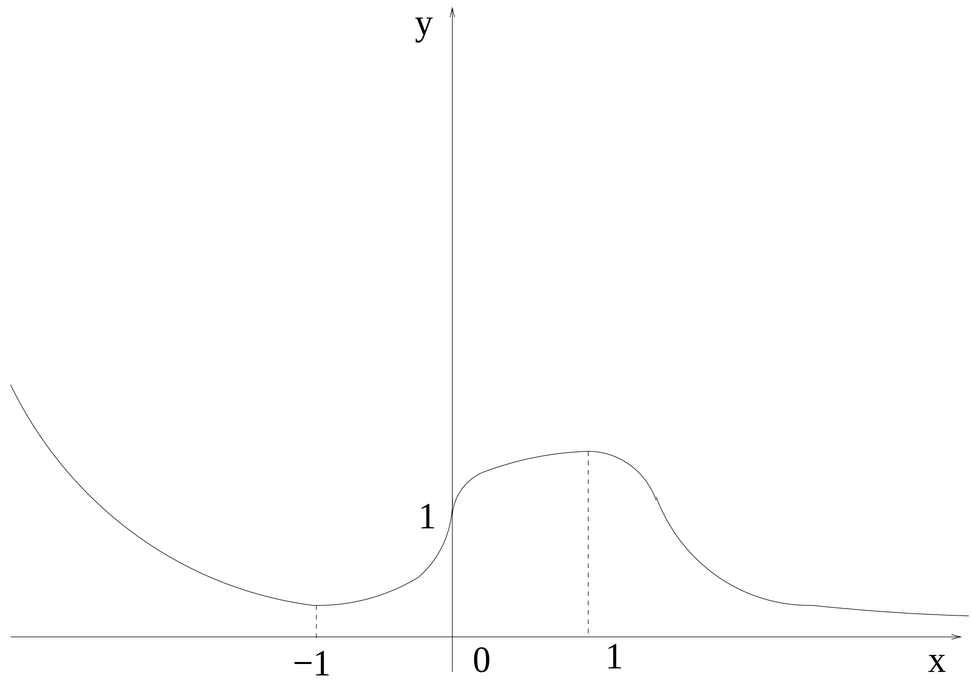
la funzione è convessa in un intorno di $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0+,$$

perché $f''(x) \geq 0$ per x appartenente ad un intorno di $+\infty$. Infatti il segno della derivata seconda è determinato dal termine racchiuso dalle parentesi quadre:

$$\frac{1+\sqrt[3]{x^4}-2\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}},$$

questo termine, per x che tende ad infinito, tende a $\frac{1}{3}$. Quindi, per il teorema della permanenza del segno, f'' è positiva in un intorno di $+\infty$. La funzione è dunque convessa in questo intorno.
A questo punto possiamo tracciare il grafico.



(4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} x^9 \ \cos x^5 \ dx.$$

Svolgimento
Effettuando il seguente cambio di variabile:

$$t = x^5, \qquad \text{per cui risulta} \qquad dt = 5x^4\,dx,$$

risulta

$$\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \ \cos t \ dt =$$
$$\text{(integrando per parti)}$$
$$= \frac{1}{5}\ [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ dt = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}\ [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}.$$

Si poteva anche procedere come segue:

$$\int_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} x^9 \ \cos x^5 \ dx = \frac{1}{5}\int_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} x^5 \ 5x^4 \ \cos x^5 \ dx.$$

Da cui si applica l'integrazione per parti prendendo $g(x) = x^5$ e $f'(x) = 5x^4 \cos x^5$, ovvero $f(x) = \sin x^5$. Quindi

$$\frac{1}{5}\int_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} x^5 \ 5x^4 \ \cos x^5 \, dx = \frac{1}{5}\left[x^5 \sin x^5\right]_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{5}\int_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} 5x^4 \sin x^5 \, dx = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}[\cos x^5]_0^{\sqrt[5]{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}.$$