Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 28 Giugno 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1)(**Punti 8**) Stabilire il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste:

$$\begin{cases} a_0 & = & 4 \\ \\ a_{n+1} & = & \sqrt[3]{2\, a_n^2 \; + \; 4\, a_n} \end{cases}$$

2)(**Punti 8**) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x) \; - \; \log(\cos 2x)}{\cos 5x \; - \; \cos 4x}$$

3) (**Punti 8**) Data la funzione

$$f(x) \; = \; \frac{x^2 \; - \; \frac{3}{4}\, x}{x \; - \; 1},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4)(**Punti 8**) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{4^x \; + \; 2^x \; - \; 6}{4^x \; - \; 1} \; 2^x \;\; dx.$$

Soluzioni degli esercizi proposti
1)(**Punti 8**) Stabilire il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste:

$$\begin{cases} a_0 & = & 4 \\ a_{n+1} & = & \sqrt[3]{2\,a_n^2 \;+\; 4\,a_n} \end{cases}$$

Svolgimento.

La successione è ben definita perchè la radice cubica è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Verifichiamo la monotonia per induzione.
Osserviamo che
$a_2 < a_1 = \sqrt[3]{48} < a_0 = 4$
Dimostriamo che è monotona decrescente.
Induttivit'à: $a_n > a_{n+1}$ implica $a_{n+1} > a_{n+2}$.
Infatti:
$a_{n+1} > a_{n+2}$ equivale a $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n^2 + 4a_n} > a_{n+2} = \sqrt[3]{2a_{n+1}^2 + 4a_{n+1}}$
ossia, elevando al cubo:
$2a_n^2 + 4a_n > 2a_{n+1}^2 + 4a_{n+1}$,
che è verificata per l'ipotesi induttiva in quanto
$a_n^2 > a_{n+1}^2$ perché i termini della successione sono tutti positivi. (bastra ragionare per induzione: $a_0 = 1 > 0$, $a_n > 0$ implica $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n^2 + 4a_n} > 0$).
Da questo segue che $a_n > a_{n+1}$ equivale a $a_n^2 > a_{n+1}^2$, ossia $2a_n^2 > 2a_{n+1}^2$, quindi $2a_n^2 + 4a_n > 2a_{n+1}^2 + 4a_n > 2a_{n+1} + 4a_{n+1}$.
La successione è limitata inferiormente perché come abbiamo visto sopra è sempre positiva.
Quindi per il teorema di regolarità delle successioni monotone ammette limite reale L. Questo risolve l'equazione

$$L = \sqrt[3]{2L^2 + 4L} \iff L^3 = 2L^2 + 4L \iff L^3 - 2L^2 - 4L = 0 \iff L(L^2 - 2L - 4) = 0$$

Le soluzioni sono $L_1 = 0$, $L_2 = 1 - \sqrt{5}$, $L_3 = 1 + \sqrt{5}$.
L_2 non può essere il limite perché come abbiamo visto la successione si mantiene sempre maggiore di zero.
Procedendo per induzione dimostriamo che la successione è sempre maggiore di L_3.
Da questo deduciamo che il limite è proprio L_3.
$a_0 = 4 > 1 + \sqrt{5}$
Supponiamo che $a_n > 1 + \sqrt{5}$. Allora $a_n^2 > (1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}$.
Quindi provare che $a_{n+1} > 1 + \sqrt{5}$ equivale a provare $a_{n+1}^3 > (1 + \sqrt{5})^3$, ossia $2a_n^2 + 4a_n > 16 + 8\sqrt{5}$.
Ma come conseguenza dell'ipotesi induttiva e dell'osservazione fatta sopra

$$2a_n^2 + 4a_n > 2(6 + 2\sqrt{5}) + 4(1 + \sqrt{5}) = 16 + 8\sqrt{5} = (1 + \sqrt{5})^3.$$

2)(**Punti 8**) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos 2x) \, - \, \log(\cos 2x)}{\cos 5x \, - \, \cos 4x}$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos 2x) \, - \, \log(\cos 2x)}{\cos 5x \, - \, \cos 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\cos 5x \, - \, \cos 4x} = \lim_{x\to 0} 0 \, = \, 0$$

Ricordare che prima si devono eseguire le operazioni algebriche e poi il passaggio al limite.
3) (**Punti 8**) Data la funzione

$$f(x) \, = \, \frac{x^2 \, - \, \frac{3}{4}\, x}{x \, - \, 1},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esistenza di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
La funzione è positiva per i valori di x che risolvono i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{3}{4}x \geq 0 \\ \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - \dfrac{3}{4}x \leq 0 \\ \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

da cui segue che $f \geq 0$ per $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ oppure $x > 1$.
Comportamento della funzione agli estremi del C.E.

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

La retta $x = 1$ è un asintoto verticale. Vediamo se la funzione ammette un asintoto obliquo $y = mx + q$:

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{4}x}{x-1} = \frac{1}{4}$$

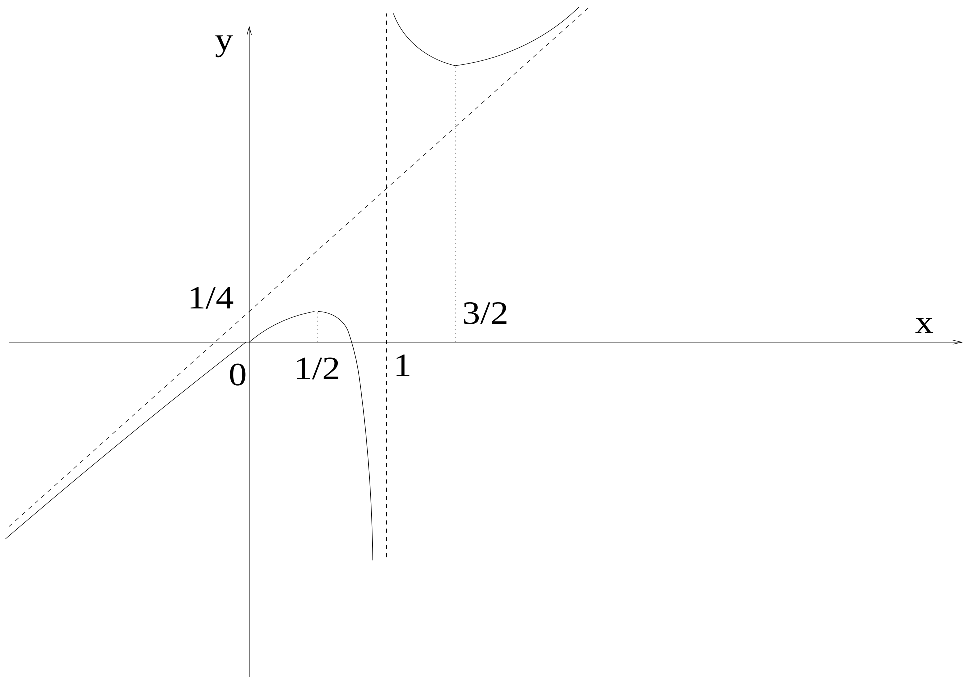
La funzione ha come asintoto la retta $y = x + \frac{1}{4}$.
Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + \frac{3}{4}}{(x-1)^2}.$$

$f' \geq 0$ se $x^2 - 2x + \frac{3}{4} \geq 0$, ossia $x \leq \frac{1}{2}$ oppure $x \geq \frac{3}{2}$. Quindi la f è crescente su $x \leq \frac{1}{2}$ oppure $x \geq \frac{3}{2}$ e decrescente su $\frac{1}{2} \leq x < 1$ oppure $1 < x \leq \frac{3}{2}$.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^3}.$$

$f''(x) > 0$ se $x > 1$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$. Quindi la funzione è convessa su $(1, +\infty)$ e concava su $(-\infty, 1)$.
Possiamo ora tracciare un grafico approssimato di f.



(4)(**Punti 8**) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{4^x + 2^x - 6}{4^x - 1}\, 2^x \; dx.$$

Svolgimento.

Effettuiamo il seguente cambio di variabile

$$t = 2^x, \quad dt = 2^x \log 2\, dx.$$

Inoltre, per $x = 1$ risulta $t = 2$, mentre per $x = 2$, $t = 4$.

$$\int_1^2 \frac{4^x\ +\ 2^x\ -\ 6}{4^x\ -\ 1}\ 2^x\ \ dx\ =\ \frac{1}{\log 2}\int_2^4 \frac{t^2+t-6}{t^2-1}\,dt.$$

Scomponiamo la frazione effettuando la divisione e otteniamo

$$\frac{t^2+t-6}{t^2-1} = 1 + \frac{t-5}{t^2-1}.$$

Scomponiamo la frazione ottenuto nel modo che segue

$$\frac{t-5}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At+A+Bt-B}{t^2-1}.$$

Da questo

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=-5 \end{cases} \implies A=-2,\ \ B=3.$$

Tenuto conto di questo

$$\frac{1}{\log 2}\int_2^4 \frac{t^2+t-6}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{\log 2}\left(\int_2^4 1\ dt\ +\ \int_2^4 \frac{-2}{t-1}\ dt\ +\ 3\int_2^4 \frac{1}{t+1}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left\{[t]_2^4 - 2[\log|t-1|\,]_2^4 + 3[\log|t+1|\,]_2^4\right\} = \frac{2}{\log 2} + \frac{3\log 5 - 5\log 3}{\log 2}.$$