Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 4 febbraio 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Dimostrare per induzione la seguente disequazione

$$\sum_{k=1}^{n} k\ 4^{k-1} \le \frac{n}{3}\ 4^n, \quad n \ge 1.$$

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1\,-\,8x^2\,-\,\cos 4x}{[\log(1\,+\,5x^2)]^2}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x)\;=\;\frac{x^2+4x+1}{x+5},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Calcolare

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x}\,-\,4)(\sqrt{x}\,+\,3)}\ dx$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 8) Dimostrare per induzione la seguente disequazione

$$\sum_{k=1}^{n} k\ 4^{k-1} \ \le\ \frac{n}{3}\ 4^n, \quad n \ge 1.$$

Svolgimento.

Per $n = 1$ è banalmente vera: $1 \cdot 4^0 \ \le\ \frac{1}{3}\, 4$
Verifichiamo l'induttivitá della proposizione: $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$, essendo $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\ 4^{k-1} \ \le\ \frac{n+1}{3}\ 4^{n+1}, \quad n \ge 1.$$

Per la proprietá associativa del simbolo di sommatoria e per l'ipotesi induttiva $\mathcal{P}(n)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\ 4^{k-1} \ =\ \sum_{k=1}^{n} k\ 4^{k-1} \ +\ (n+1)\, 4^{[(n+1)-1]}$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\le\ \frac{n}{3}\ 4^n \ +\ (n+1)\, 4^n$$

La proposizione è dimostrata se proviamo che

$$\frac{n}{3}\ 4^n \ +\ (n+1)\, 4^n \ \le\ \frac{n+1}{3}\ 4^{n+1}.$$

Per fare questo procediamo come segue

$$\frac{n}{3}\ 4^n \ +\ (n+1)\, 4^n \ \le\ \frac{n+1}{3}\ 4^{n+1} \ \Longleftrightarrow\ n\ 4^n \ +\ 3\,(n+1)\, 4^n \ \le\ (n+1)\, 4 \cdot 4^n \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ n \ +\ 3\,(n+1) \ \le\ (n+1)\, 4 \ \Longleftrightarrow\ 3 < 4.$$

Quest'ultima diseguaglianza è vera, quindi l'asserto è dimostrato.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 \ -\ 8x^2 \ -\ \cos 4x}{[\log(1 \ +\ 5x^2)]^2}.$$

Svolgimento

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Risolviamo l'indeterminazione mediante gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\cos t \ =\ 1 \ -\ \frac{1}{2}\, t^2 \ +\ \frac{1}{24}\, t^4 \ +\ o(t^4),$$

(ponendo $t = 4x$)

$$\cos\ 4x \ =\ 1 \ -\ 8\, x^2 \ +\ \frac{32}{3}\, x^4 \ +\ o(x^4),$$

$$\log(1+t) \ =\ t + o(t)$$

(ponendo $t = 5x^2$)

$$\log(1+5x^2) \ =\ 5x^2 \ +\ o(x^2)$$

$$\big[\log(1+5x^2)\big]^2 \ =\ \big[5x^2 \ +\ o(x^2)\big]^2 \ =\ 25\, x^4 \ +\ 10\, x^2\, o(x^2) \ +\ o(x^4) \ =\ 25\, x^4 \ + o(x^4).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1\,-\,8x^2\,-\,\cos 4x}{[\log(1\,+\,5x^2)]^2} \,=\, \lim_{x\to 0} \frac{1-8x^2-1\,+\,8\,x^2\,-\,\frac{32}{3}\,x^4\,+\,o(x^4)}{25\,x^4\,+o(x^4)} =$$

(semplificando e applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\,\frac{32}{3}\,x^4}{25\,x^4} \,=\, -\,\frac{32}{75}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) \,=\, \frac{x^2+4x+1}{x+5},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

a) Il campo di esistenza è determinato dai valori di x che rendono diverso da zero il denominatore della frazione, ossia $x \neq -5$. Il campo di esistenza è $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Determiniamo il segno e gli eventuali zeri della funzione, risolvendo $f(x) > 0$, ovvero

$$\frac{x^2+4x+1}{x+5} > 0 \iff \begin{cases} x^2+4x+1 > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+4x+1 < 0 \\ x+5 < 0 \end{cases}$$

Dalla risoluzione dei due sistemi deduciamo che

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in (-5,\, -2-\sqrt{3}) \cup (-2+\sqrt{3},\, +\infty),$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x \in (-\infty,\, -5) \cup (-2-\sqrt{3},\, -2+\sqrt{3}).$$

I seguenti punti sono zeri della funzione:

$$x_1 \,=\, -2-\sqrt{3},\;\; x_2 \,=\, -2+\sqrt{3}.$$

Limiti della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to 5+} f(x) \,=\, +\infty, \quad \lim_{x\to 5-} f(x) \,=\, -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \,=\, +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) \,=\, -\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette asintoti obliqui $y = mx + q$.

$$m \,=\, \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \,=\, \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4x+1}{x(x+5)} \,=\, 1,$$

$$q \,=\, \lim_{x\to +\infty} f(x) - x \,=\, \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4x+1}{x+5} \,-\, x \,=\, \lim_{x\to +\infty} \frac{-x+1}{x+5} \,=\, -1.$$

Stesso risultato si ottiene per x che tende a meno infinito.
Quindi la retta $y = x - 1$ è asintoto della funzione.

b) Calcoliamo la derivata prima di f per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{x^2+10\,x+19}{(x+5)^2}.$$

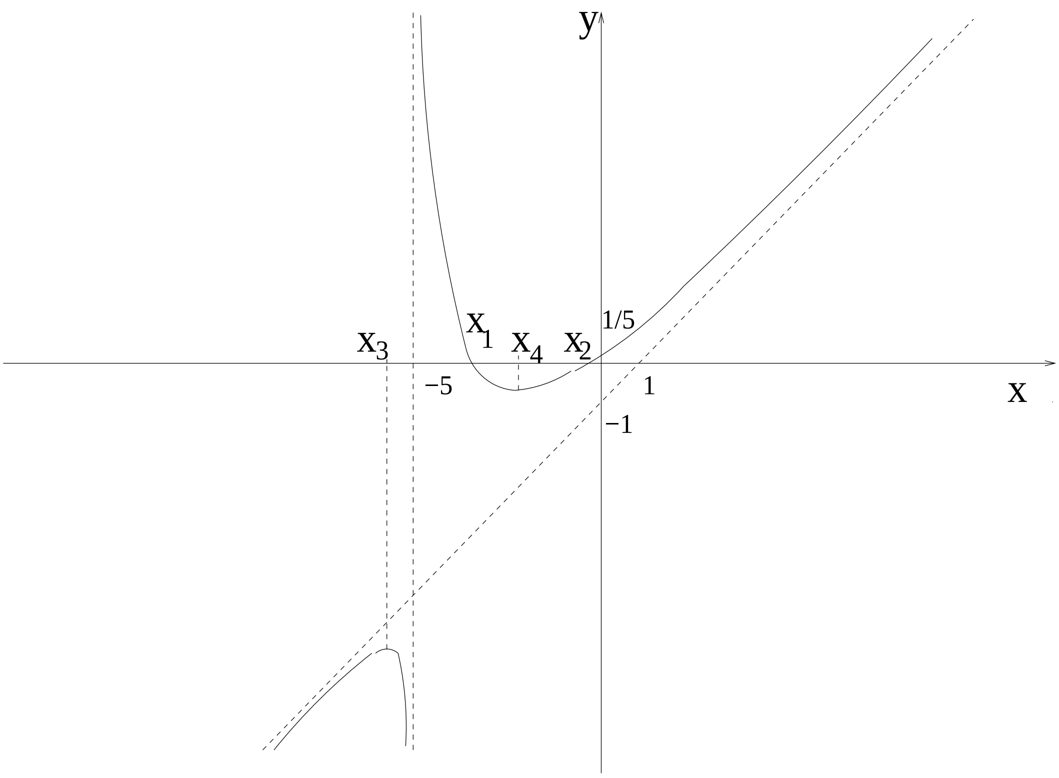
Il segno di f' è determinato dal segno del numeratore che troviamo risolvendo $x^2+10\,x+19>0$. Gli zeri del polinomio sono $x_3=-5-\sqrt{6}$, $x_4=-5+\sqrt{6}$.
$f'(x)>0$ per $x\in(-\infty,\,-5-\sqrt{6})$ oppure $x\in(-5+\sqrt{6},\,+\infty)$.
Quindi
f è crescente per $x\in(-\infty,\,-5-\sqrt{6})$ oppure $x\in(-5+\sqrt{6},\,+\infty)$.
Mentre
$f'(x)<0$ per $x\in(-5-\sqrt{6},\,-5+\sqrt{6})\setminus\{-5\}$.
Quindi
f è decrescente per $x\in(-5-\sqrt{6},\,-5)$ oppure $x\in(-5,\,-5+\sqrt{6})$.
Da questo deduciamo che x_3 è punto di massimo relativo, mentre x_4 è punto di minimo relativo.

c) Calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intrvalli di concavitá e convessitá della funzione.

$$f''(x) = \frac{12}{(x+5)^3}$$

$f''(x)>0$ per $x\in(-5,\,+\infty)$.
Quindi
f è convessa per $x\in(-5,\,+\infty)$.
Mentre
$f''(x)<0$ per $x\in(-\infty,\,-5)$.
Quindi
f è concava per $x\in(-\infty,\,-5)$.

d) In base a quanto trovato sopra possiamo tracciare il grafico di f.



4. (punti 8) Calcolare

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x}\,-\,4)(\sqrt{x}\,+\,3)}\;dx$$

Svolgimento.

Effettuiamo il cambio di variabile: $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, da cui $dx\,=\,2t\,dt$.

$$\int \frac{2t}{(t\,-\,4)(t\,+\,3)}\;dt$$

La funzione integranda è di tipo razionale, quindi si tratta di determinare i parametri reali A e B in modo che valga l'identit''a

$$\frac{A}{(t\,-\,4)} + \frac{B}{(t\,+\,3)} = \frac{2t}{(t\,-\,4)(t\,+\,3)} \iff At\,+\,3A\,+\,Bt\,-\,4B\,=\,2t \iff$$

$$\iff (A+B)t\,+\,3A\,-\,4B\,=\,2t$$

L'identitá che abbiamo ottenuto è tra due polinomi (di primo grado) che si realizza se i coefficienti di egual grado sono uguali. Quindi si deve verificare

$$\begin{cases} A\,+\,B\,=\,2 \\ \\ 3A\,-\,4B\,=\,0 \end{cases} \iff A\,=\,\frac{4}{3}B,\;\; B\,=\,\frac{6}{7},\;\; A\,=\,\frac{8}{7}.$$

Sostituendo

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{(t\,-\,4)(t\,+\,3)}\;dt &= \frac{8}{7}\int \frac{1}{t\,-\,4}\;dt + \frac{6}{7}\int \frac{1}{t\,+\,3}\;dt = \\ &= \frac{8}{7}\;\log|t-4|\,+\,\frac{6}{7}\;\log|t+3|\,+C\,.\end{aligned}$$

In definitiva:

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x}\,-\,4)(\sqrt{x}\,+\,3)}\;dx\,=\,\frac{8}{7}\;\log|\sqrt{x}-4|\,+\,\frac{6}{7}\;\log(\sqrt{x}+3)\,+C.$$