

**Analisi Matematica II - Corso di Laurea in Fisica**

**Esercizi sulle serie.**

Studiare il comportamento delle seguenti serie.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos 2^n}{n^2 + 1};$                            | 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n\sqrt{n} + n + 5};$                       | 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n + n^2}{3^n + n}$        |
| 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2};$                | 5) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n};$                                    | 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n!}{n^3};$                    |
| 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}};$                                | 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(\frac{n+1}{n}\right);$                           | 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n + \sqrt{n}};$         |
| 10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \sqrt{1+n^2}}{n};$                        | 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2;$                          | 12) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}};$           |
| 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n!}};$                           | 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{n+1}{4n}\right)^n;$       | 15) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$         |
| 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n \cos n + 1};$                  | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right);$                   | 18) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$ |
| 19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{1}{n};$ | 20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \sin \frac{2}{n}.$ |   |

Studiare la convergenza, al variare di  $x \in \mathbb{R}$ , delle seguenti serie:

- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} e^{nx};$                                 | 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^x (\log n)^2;$  | 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left \frac{x-1}{x}\right ^{nx};$   | 4) $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n;$             |
| 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} (\cos x)^n;$                           | 6) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{e^{nx}};$                                      | 7) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n(x+1)} x^4 n^5;$  | 8) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n 2^n};$ |
| 9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! x^n};$                                      | 10) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(2x-1)2^n};$                            | 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{n 3^n};$   |  |
| 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1) \log^2(n+1)};$                    | 13) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n}{n-1} - e^{\frac{1}{n}}\right)^x;$       | 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{x+2}{1+ x }\right)\right]^n;$ |  |
| 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \left(\left \frac{4x-1}{x+4}\right  - 4\right)^n;$ | 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \arctan \left(\frac{x-4}{x-1}\right)^n;$ | 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{ x } n^2}{1+n^4 x^2};$   |  |
| 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{e^{nx^2} + e^{nx}};$                     | 19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\log(1+n)]^x}{n};$                              | 20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{4x}{x^2+1}\right)^n;$                              |  |
| 21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x + n \log n};$                             | 22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{n}{n^{3x} + 1}\right);$           | 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^{x^n} - 1);$  | 24) $\left(\frac{nx+1}{n(x-1)}\right)^n$     |

### Soluzione degli esercizi sulle serie numeriche.

Sono convergenti le serie: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20.

Sono divergenti le serie: 4, 8, 9, 10, 15, 18.

Sono assolutamente convergenti le serie: 3, 16.

### Soluzioni degli esercizi delle serie con parametro

- (1)  $\mathbb{R}$ ;
- (2)  $x < -1$ ;
- (3)  $x < 0$  oppure  $x > \frac{1}{2}$ ;
- (4)  $|x| < 1$ ;
- (5)  $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;
- (6)  $x > 0$ ;
- (7)  $x < -1$  e  $x = 0$ ;
- (8)  $-2 \leq x < 2$ ;
- (9)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- (10)  $0 \leq x < 4$ ;
- (11)  $2 < x \leq 8$ ;
- (12)  $-2 \leq x \leq 0$ ;
- (13)  $x > \frac{1}{2}$ ;
- (14) converge se  $x \in [-5, -1] \cup [\frac{-1}{5}, 1]$ ; diverge se  $x \in [-1, \frac{-1}{2}]$ , indeterminata negli altri casi.
- (15) converge sugli intervalli  $(-\infty, -21], [\frac{-19}{9}, \frac{-11}{7}], (13, +\infty)$ ; converge assolutamente su  $(-\infty, -21), (\frac{-19}{9}, \frac{-11}{7}), (13, +\infty)$ ; diverge su  $(-21, \frac{-19}{9}) \setminus \{-4\}$ ; indeterminata su  $(\frac{-11}{7}, 13]$ ;
- (16) converge per  $x > 1$ , diverge per  $x < 1$ ;
- (17)  $\mathbb{R}$ ;
- (18) converge per  $x \in (0, 1)$ ; diverge negli altri casi;
- (19)  $x < -1$ ;
- (20) diverge per  $x \in [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$ ; indeterminata per  $[-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}]$ ; converge negli altri casi;
- (21)  $x > 0$ ;
- (22)  $x > \frac{2}{3}$ ;
- (23)  $x \in (0, 1]$ ;
- (24) converge per  $x < \frac{1}{2}$ , diverge per  $x > 1$ , indeterminata negli altri casi in cui è definita.