Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 1 luglio 2017
Fila 1.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Dimostrare per induzione la seguente diseguaglianza:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} \leq \frac{1}{4^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\log x + \sin\left(\frac{\log x + |\log x|}{2}\right)$$

a) (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) dire se f è continua e derivabile sul suo campo di esistenza;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo sull'intervallo $(0, e^{2\pi}]$;

d) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità ed eventuali flessi sull'intervallo $(0, e^{2\pi}]$;

e) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(\sin 4x^2)^2 - 16(\sin x^2)^2}{\sqrt[4]{1-2x^4} - \cos x^2}$$

4. (Punti 8) Calcolare

$$\int \frac{\sqrt{t-1} - 3}{16 - (t-1)^2}\, dt.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 1 luglio 2017
Fila 2.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Dimostrare per induzione la seguente diseguaglianza:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{7}\right)^{n} \leq \frac{1}{4^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \cos\left(\frac{|\log x| \;+\; \log x}{2}\right) \;+\; \frac{\log x}{\sqrt{2}}$$

a) (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) dire se f è continua e derivabile sul suo campo di esistenza;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo sull'intervallo $(0,\, e^{2\pi}]$

d) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità ed eventuali flessi sull'intervallo $(0,\, e^{2\pi}]$;

e) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{[e^{2x^3} \;-\; 2\,e^{x^3} \;+\; 1]^2}{[\log(1+3x^2)]^2 \;-\; 9[\log(1+x^2)]^2}$$

4. (Punti 8) Calcolare

$$\int \frac{2 \;-\; \sqrt{t+1}}{(t+1)^2 \;-\; 81}\; dt.$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 1

Esercizio 1.

Per $n = 1$ è ovvia. Verifichiamo l'induttività della proposizione. Supponiamo che sia vera per $n \geq 1$ e dimostriamo che da questo segue che vale per $n+1$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{2}{5} \leq$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\leq \frac{6}{25} \frac{1}{4^{n-1}} < \frac{1}{4} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^n}.$$

Esercizio 2.

Esplicitiamo il modulo che compare nell'espressione della funzione tenendo conto che

$$\log x + |\log x| = \begin{cases} \log x - \log x = 0, & x \in (0,1], \\ \log x + \log x, & x \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \log x, & x \in (0,1], \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \log x + \sin(\log x), & x \geq 1. \end{cases}$$

Il campo di esistenza della funzione è $(0, +\infty)$ (determinato dalla funzione *logaritmo*). È evidente che

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log x \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(\log x)}{\log x} \right) = -\infty.$$

La funzione risulta continua su $(0, +\infty) \setminus \{1\}$, perchè composizione di funzioni continue. Mentre

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = 0.$$

Dunque f è continua anche in $x = 1$. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x}, & x \in (0,1), \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \cos(\log x), & x > 1. \end{cases}$$

Da cui essendo
$$\lim_{x\to 1-} f'(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to 1+} f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$
deduciamo che f non è derivabile in $x = 1$. In particolare il punto $x = 1$ è un punto angoloso con le tangenti al grafico di f che hanno come coefficienti angolari i valori sopra determinati. Inoltre $f(1) = 0$.

Osserviamo che $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$, dunque su questo intervallo f è decrescente. Valutiamo il segno di f' per $1 < x < e^{2\pi}$, risolvendo la disequazione
$$\frac{1}{x}\,\cos(\log x) \;-\; \frac{1}{x\sqrt{2}} < 0 \quad\iff\quad \cos(\log x) \;<\; \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
La diseguaglianza è verificata dagli angoli che soddisfano
$$\frac{\pi}{4} \;+\; k2\pi \;< \log x < \frac{7}{4}\pi \;+\; k2\pi,$$
con $k \in \mathbb{Z}$. Dato che deve essere $\log x > 0$, la diseguaglianza è verificata per $k \in \mathbb{N}$. Infine, essendo richiesto che $x \in (0, e^{2\pi}]$, prendiamo $k = 0$. Tenuto conto di quanto visto sopra, possiamo dire quindi che $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$, $e^{\frac{\pi}{4}} < x < e^{\frac{7}{4}\pi}$. Mentre negli altri intervalli del dominio $(0, e^{2\pi}]$ si verifica $f'(x) > 0$. Segue che la funzione risulta decrescente se $0 < x < 1$, $e^{\frac{\pi}{4}} < x < e^{\frac{7}{4}\pi}$. Negli altri intervalli è crescente. I punti
$$x_1 = e^{\frac{\pi}{4}}, \;\; x_2 = e^{2\pi}$$
sono di massimo relativo. Mentre
$$x_3 = e^{\frac{7\pi}{4}}, \;\; x_4 = 1$$
sono di minimo relativo.

Osserviamo che
$$f(e^{\frac{\pi}{4}}) = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \quad f(e^{\frac{7}{4}\pi}) = -\frac{7\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0, \;\; f(e^{2\pi}) = -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} < 0.$$
È evidente che
$$f(e^{2\pi}) > f(e^{\frac{7}{4}\pi}).$$
Procediamo allo studio della concavità e della convessità mediante la derivata seconda.
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1), \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{x^2} \;-\; \dfrac{1}{x^2}\,\cos(\log x) \;-\; \dfrac{1}{x^2}\,\sin(\log x), & x > 1. \end{cases}$$
$f''(x) > 0$ se $0 < x < 1$, oppure per i valori $x > 1$ che soddisfano
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \;-\; \cos(\log x) \;-\; \sin(\log x) > 0 \quad\iff\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \;-\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos(\log x) \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin(\log x)\right] > 0,$$

da questa, tenuto conto delle formule di addizione della *funzione seno*,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \log x\right) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} > \sin\left(\frac{\pi}{4} + \log x\right).$$

La diseguaglianza è verificata per i seguenti angoli

$$k2\pi < \frac{\pi}{4} + \log x < \frac{\pi}{6} + k2\pi, \text{ oppure } \frac{5}{6}\pi + k2\pi < \frac{\pi}{4} + \log x < (k+1)2\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi $f''(x) > 0$ i valori di $x \in (1,\, 2\pi]$ che verificano le diseguaglianze sopra per $k = 0$ sono([1])

$$\frac{5}{6}\pi < \frac{\pi}{4} + \log x < 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4} < \log x < 2\pi - \frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\frac{7}{12}} < x < e^{\frac{7}{4}\pi}.$$

Per $k = 1$([2])

$$2\pi < \frac{\pi}{4} + \log x < \frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi - \frac{\pi}{4} < \log x < \frac{23}{12}\pi \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\frac{7}{4}\pi} < x < e^{\frac{23}{12}\pi}.$$

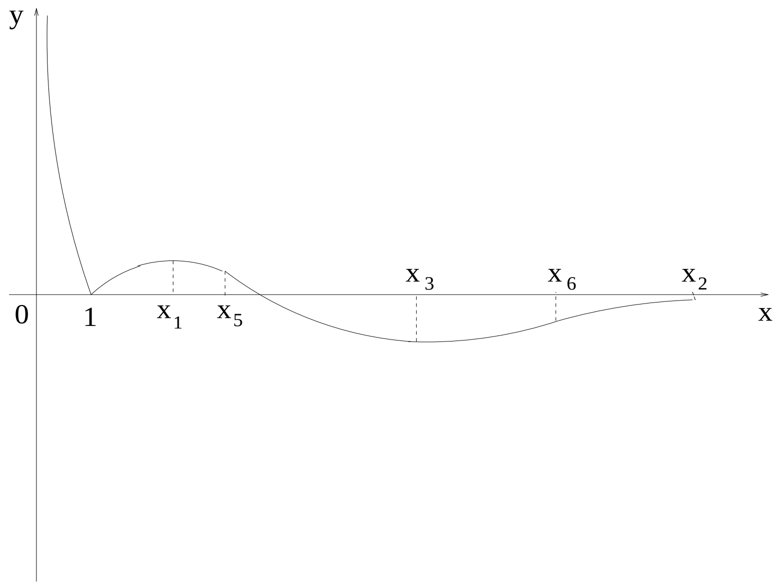
Da queste deduciamo che se

$$e^{\frac{7}{12}\pi} < x < e^{\frac{23}{12}\pi}$$

$f''(x) > 0$ quindi su questo intervallo la funzione è convessa mentre è concava nel suo complementare. I punti

$$x_5 = e^{\frac{7}{12}\pi}, \;\; x_6 = e^{\frac{23}{12}\pi}$$

sono punti di flesso per f.
Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico di f.



[1] $0 < \frac{\pi}{4} + \log x < \frac{\pi}{6}$ non ha soluzioni per $x > 1$.
[2] $\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \frac{\pi}{4} + \log x$, non ha soluzioni per $x \leq e^{2\pi}$.

Esercizio 3.

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor di ciascuna delle funzioni che compaiono nel limite.

$$\sin^2 4x^2 = \left[4x^2 - \frac{32}{3}x^6 + o(x^6)\right]^2 = 16x^4 - \frac{256}{3}x^8 + o(x^8);$$

$$16\sin^2 x^2 = \left[x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]^2 = 16\left[x^4 - \frac{1}{3}x^8 + o(x^8)\right] = 16\,x^4 - \frac{16}{3}x^8 + o(x^8);$$

$$\sqrt[4]{1-2x^4} = 1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 + o(x^8);$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + o(x^8);$$

Sostituendo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{16x^4 - \frac{256}{3}x^8 + o(x^8) - 16\,x^4 + \frac{16}{3}x^8 + o(x^8)}{1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 + o(x^8) - 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{24}x^8 + o(x^8)} = \lim_{x\to 0+} \frac{80\,x^8}{-\frac{5}{12}x^8} = -192.$$

Esercizio 4.

Effettuiamo il cambio di variabile $t = s^2 + 1$, quindi $dt = 2s\,ds$. Sostituiamo nell'integrale

$$\int \frac{(s-3)2s}{16-s^4}\,ds = \int \frac{(s-3)2s}{(2-s)(2+s)(4+s^2)}\,ds$$

La funzione integranda è razionale, applichiamo quindi il metodo di integrazione per questo tipo di funzioni determinando le costanti reali A, B, C, D tali che

$$\frac{2s(s-3)}{(2-s)(2+s)(4+s^2)} = \frac{A}{2-s} + \frac{B}{2+s} + \frac{Cs+D}{4+s^2}.$$

Da questa effettuando la somma al secondo membro ed eguagliando i numeratori

$$A(4+s^2)(2+s) + B(2-s)(4+s^2) + (Cx+D)(4-s^2) = 2s(s-3).$$

Per $s = 2$ otteniamo $32A = -4$, quindi $A = -\frac{1}{8}$;
per $s = -2$, $32B = 20$, ovvero $B = -\frac{5}{8}$;
per $s = 2i$, $(2Ci + D)8 = 4i(2i-3) = -8 - 12i$, ovvero $16Ci + 8D = -8 - 12i$.
Le costanti C e D si determinano imponendo l'eguaglianza tra parte immaginaria e parte reale, quindi $C = -\frac{3}{4}$ e $D = -1$.
Sostituiamo nell'integrale

$$\int \frac{2s(s-3)}{16-s^4}\,ds = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{2-s}\,ds + \frac{5}{8}\int \frac{1}{2+s}\,ds + \int \frac{-\frac{3}{4}s - 1}{4+s^2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{8}\log|2-s| + \frac{5}{8}\log|2+s| - \frac{3}{8}\int \frac{2s}{4+s^2}\,ds - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{s^2}{4}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{8}\log|2-s| + \frac{5}{8}\log|2+s| - \frac{3}{8}\log(4+s^2) - \frac{1}{2}\arctan\frac{s}{2} + c.$$

Da cui

$$\int \frac{\sqrt{t-1}\ -\ 3}{16\ -\ (t-1)^2}\ dt =$$

$$= \frac{1}{8}\ \log|2-\sqrt{t-1}|\ +\ \frac{5}{8}\ \log(2+\sqrt{t-1})\ -\ \frac{3}{8}\ \log(t+3)\ -\ \frac{1}{2}\ \arctan\frac{\sqrt{t-1}}{2}\ +\ c.$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 2

Esercizio 1.

Per $n = 1$ è ovvia. Verifichiamo l'induttività della proposizione. Supponiamo che sia vera per $n \geq 1$ e dimostriamo che da questo segue che vale per $n+1$.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^n \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} \frac{4}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{3}{7} \leq$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\leq \frac{12}{49}\,\frac{1}{4^{n-1}} < \frac{1}{4}\,\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^n}.$$

Esercizio 2.

Esplicitiamo il modulo che compare nell'espressione della funzione tenendo conto che

$$|\log x|\ +\ \log x\ = \begin{cases} -\log x\ +\ \log x = 0, & x \in (0,1], \\ \log x\ +\ \log x, & x \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \log x, & x \in (0,1], \\ \cos(\log x)\ +\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \log x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Il campo di esistenza della funzione è $(0,\ +\infty)$ (determinato dalla funzione *logaritmo*). È evidente che

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log x \left(\frac{\cos(\log x)}{\log x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ =\ +\infty.$$

La funzione risulta continua su $(0,\ +\infty) \setminus \{1\}$, perchè composizione di funzioni continue. Mentre

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 1.$$

Dunque f è continua anche in $x = 1$. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x}, & x \in (0,1), \\ \\ -\dfrac{1}{x} \sin(\log x) + \dfrac{1}{x\sqrt{2}}, & x > 1. \end{cases}$$

Osservato che

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{x \to 1+} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

per il criterio di derivabilità, essendo f continua in $x = 1$, deduciamo che f è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Osserviamo che $f'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$, dunque su questo intervallo f è crescente. Valutiamo il segno di f' per $1 < x < e^{2\pi}$, risolvendo la disequazione

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin(\log x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\log x) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La diseguaglianza è verificata dagli angoli che soddisfano

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi < \log x < \frac{3}{4}\pi + k2\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Dato che deve essere $\log x > 0$, la diseguaglianza è verificata per $k \in \mathbb{N}$. Infine, essendo richiesto che $x \in (0, e^{2\pi}]$, prendiamo $k = 0$. Tenuto conto di quanto visto sopra, possiamo dire quindi che $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$, $e^{\frac{\pi}{4}} < x < e^{\frac{3}{4}\pi}$. Mentre negli altri intervalli del dominio $(0, e^{2\pi}]$ si verifica $f'(x) > 0$. Segue che la funzione risulta decrescente se $e^{\frac{\pi}{4}} < x < e^{\frac{3}{4}\pi}$. Negli altri intervalli è crescente. Il punto

$$x_1 = e^{\frac{3}{4}\pi}$$

è di minimo relativo. Mentre i punti

$$x_2 = e^{\frac{\pi}{4}}, \quad x_3 = e^{2\pi}$$

sono di massimo relativo.
Osserviamo che

$$f(e^{\frac{\pi}{4}}) = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \quad f(e^{\frac{3}{4}\pi}) = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \quad f(e^{2\pi}) = 1 + \frac{2\pi}{\sqrt{2}} > 0.$$

Procediamo allo studio della concavità e della convessità mediante la derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1), \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} \cos(\log x) + \dfrac{1}{x^2} \sin(\log x), & x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $f''(x) < 0$ se $0 < x < 1$. Stabiliamo il segno di f'' risolvendo

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(\log x) + \sin(\log x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\log x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\log x)\right] > 0,$$

da questa, tenuto conto delle formule di addizione della *funzione seno*,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\log x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \sin\left(\log x - \frac{\pi}{4}\right).$$

La diseguaglianza è verificata per i seguenti angoli

$$\frac{\pi}{6} + k2\pi < \log x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

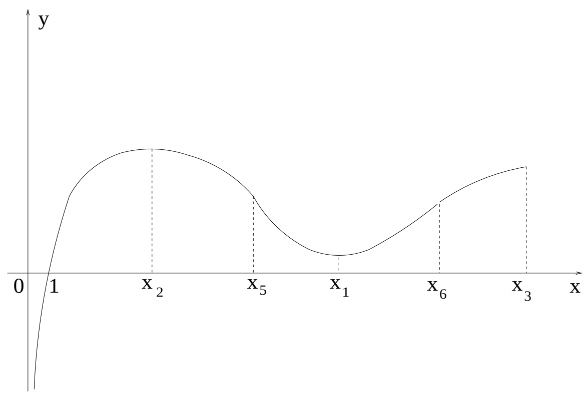
Quindi $f''(x) > 0$ i valori di $x \in (1,\, e^{2\pi}]$ che verificano le diseguaglianze sopra per $k = 0$

$$\frac{1}{6}\pi + \frac{\pi}{4} < \log x < \frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\frac{5}{12}} < x < e^{\frac{13}{12}\pi}.$$

Dunque $f''(x) > 0$su questo intrvallo e quindi in esso la funzione è convessa mentre è concava nel suo complementare. I punti

$$x_5 = e^{\frac{5}{12}\pi}, \;\; x_6 = e^{\frac{13}{12}\pi}$$

sono punti di flesso per f.
Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico di f.



Esercizio 3.

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor di ciascuna delle funzioni che compaiono nel limite.

$$e^{2x^3} = 1 + 2x^3 + 2x^6 + o(x^6);$$

$$2\,e^{x^3} = 2\left[1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6)\right] = 2 + 2x^3 + x^6 + o(x^6);$$

$$\left[e^{2x^3} - 2\,e^{x^3} + 1\right]^2 = [x^6 + o(x^6)]^2 = x^{12} + o(x^{12})$$

$$\left[\log(1+3x^2)\right]^2 = \left[3x^2 - \frac{9}{2}\,x^4 + o(x^4)\right]^2 = 9x^4 - 27x^6 + o(x^6);$$

$$9\,[\log(1+x^2)]^2 = 9\,\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)\right]^2 = 9\,x^4 - 9\,x^6 + o(x^6).$$

$$\left[\log(1+3x^2)\right]^2 - 9\,[\log(1+x^2)]^2 = -\,18\,x^6 + o(x^6).$$

Sostituendo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{12} + o(x^{12})}{-18\,x^6 + o(x^6)} = 0.$$

Esercizio 4.

Effettuiamo il cambio di variabile $t = s^2 - 1$, quindi $dt = 2s\,ds$. Sostituiamo nell'integrale

$$\int \frac{(2-s)2s}{s^4-81}\,ds = 2\int \frac{(2-s)s}{(s-3)(s+3)(s^2+9)}\,ds.$$

La funzione integranda è razionale, applichiamo quindi il metodo di integrazione per questo tipo di funzioni determinando le costanti reali A, B, C, D tali che

$$\frac{(2-s)s}{(s-3)(s+3)(s^2+9)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+9}.$$

Da questa effettuando la somma al secondo membro ed eguagliando i numeratori

$$(2-s)s = A(s^2+9)(s+3) + B(s-3)(s^2+9) + (Cs+D)(s^2-9).$$

Per $s = 3$ otteniamo $-1 = A36$, quindi $A = -\frac{1}{36}$;
per $s = -3$, , ovvero $B = \frac{5}{36}$;
per $s = 3i$, $(2-3i)3i = -18(3Ci + D)$, ovvero $6i + 9 = -54iC - 18D$.
Le costanti C e D si determinano imponendo l'eguaglianza tra parte immaginaria e parte reale, quindi $C = -\frac{1}{9}$ e $D = -\frac{1}{2}$.
Sostituiamo nell'integrale

$$2\int \frac{(2-s)s}{s^4-81}\,ds = -\frac{1}{36}\int \frac{1}{s-3}\,ds + \frac{5}{36}\int \frac{1}{s+3}\,ds + \int \frac{-\frac{1}{9}s - \frac{1}{2}}{s^2+9}\,ds =$$

$$= -\frac{1}{36}\log|s-3| + \frac{5}{36}\log|s+3| - \frac{1}{18}\int \frac{2s}{s^2+9}\,ds - \frac{1}{18}\int \frac{1}{1+\frac{s^2}{9}}\,ds =$$

$$= -\frac{1}{36}\log|s-3| + \frac{5}{36}\log|s+3| - \frac{1}{18}\log(s^2+9) - \frac{1}{6}\arctan\frac{s}{3} + c.$$

Da cui

$$\int \frac{2 - \sqrt{t+1}}{(t+1)^2 - 81}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{36}\log|\sqrt{t+1}-3| + \frac{5}{36}\log(\sqrt{t+1}+3) - \frac{1}{18}\log(t+10) - \frac{1}{6}\arctan\frac{\sqrt{t+1}}{3} + c.$$