Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 4 febbraio 2017
Fila 1.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 9) Data l'equazione:

$$\overline{z}^7(1+i) - 256 = 0,$$

a) (punti 6) determinare tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ che la verificano;

b) (punti 3) dimostrare che la somma di tutte le radici è zero.

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

a) (punti 4) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{5x}}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) (punti 2) dimostrare che esiste finito mediante uno studio a priori;

b) (punti 6) dimostrare per induzione che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{5x}}\, dx = \frac{n!}{5^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! + 2^n}{n^n + 1}.$$

Esercizio 1 a)

$$\overline{z}^7 = \frac{256}{1+i} = \frac{256(1-i)}{(1-i)(1+i)} = 128(1+i) \quad \Longleftrightarrow \quad z^7 = 128(1+i)$$

Esprimiamo il numero complesso $1-i$ in forma trigonometrica.

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi \ + \ i\ \sin\frac{1}{4}\pi\right),$$

da cui, applicando la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso, otteniamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z \in \left\{2\sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{28} + \frac{k2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{28} + \frac{k2\pi}{7}\right)\right],\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\right\}.$$

Oppure in forma esponenziale

$$z \in \left\{2\sqrt[14]{2}e^{\left(\frac{\pi}{28}+\frac{k2\pi}{7}\right)i},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\right\}$$

Esercizio 1 b)
Sfruttiamo l'espressione delle radici ennesime nella forma esponenziale:

$$\sum_{k=0}^{6} 2\sqrt[14]{2}e^{\left(\frac{\pi}{28}+\frac{k2\pi}{7}\right)i} \ = \ 2\sqrt[14]{2}e^{\left(\frac{\pi}{28}\right)i}\sum_{k=0}^{6} e^{\left(\frac{k2\pi}{7}\right)i}$$

Sfruttiamo la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica([1])

$$\sum_{k=0}^{6} e^{\frac{k2\pi}{7}i} = \frac{1-e^{\frac{2\pi\, i\, 7}{7}}}{1-e^{\frac{2\pi\, i}{7}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi\, i}{7}}} = 0.$$

Perchè $e^{2\pi\, i} = 1$.
Esercizio 2

Il campo di esistenza è dato dai valori di x tali che

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Il sistema ha soluzioni $x \geq 1$ oppure $x \leq -1$. $f(\pm 1) = \sqrt{3}$
Osserviamo che la funzione è positiva se $\sqrt{4x^2-1} > \sqrt{x^2-1}$, che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

---

[1]

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \ = \ \frac{1-a^{n+1}}{1-a},\ \ a \in \mathbb{R},$$

dove $a \neq 1$.

La funzione è pari: $f(-x) = f(x)$, infatti

$$f(-x) = \sqrt{4(-x)^2 - 1} - \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$$

È dunque sufficiente studiare f per $x \geq 0$ e poi effettuare la simmetria rispetto all'asse y.
Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette asintoti all'infinito.

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x} &= \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{x} &= \\ = \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} - x &= \\ = \lim_{x\to+\infty} x\left[2\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right] - x& \end{aligned}$$

Applichiamo lo sviluppo di Taylor

$$(1 + t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t)$$

con $t = \frac{1}{x^2}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

$$q = \lim_{x\to+\infty} x\left[2 - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{4}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Quindi per x che tende a $+\infty$ l'asintoto è $y = x$. Poichè la funzione è dispari, per x che tende a $-\infty$ l'asintoto è $y = -x$ (per simmetria rispetto all'asse y).
Calcolo della derivata prima per determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo e gli intervalli di monotonia, per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$f'(x) > 0 \iff 12x^2 - 15 > 0 \iff x > \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Quindi la funzione risulta crescente in $(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ e decrescente in $[1, \frac{\sqrt{5}}{2})$.
Il punto $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ è di minimo assoluto.
Per simmetria: la funzione risulta crescente in $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -1]$ e decrescente in $(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2})$.
Il punto $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ è di minimo assoluto.
Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty.$$

Procediamo al calcolo della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-4}{(4x^2-1)\sqrt{4x^2-1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

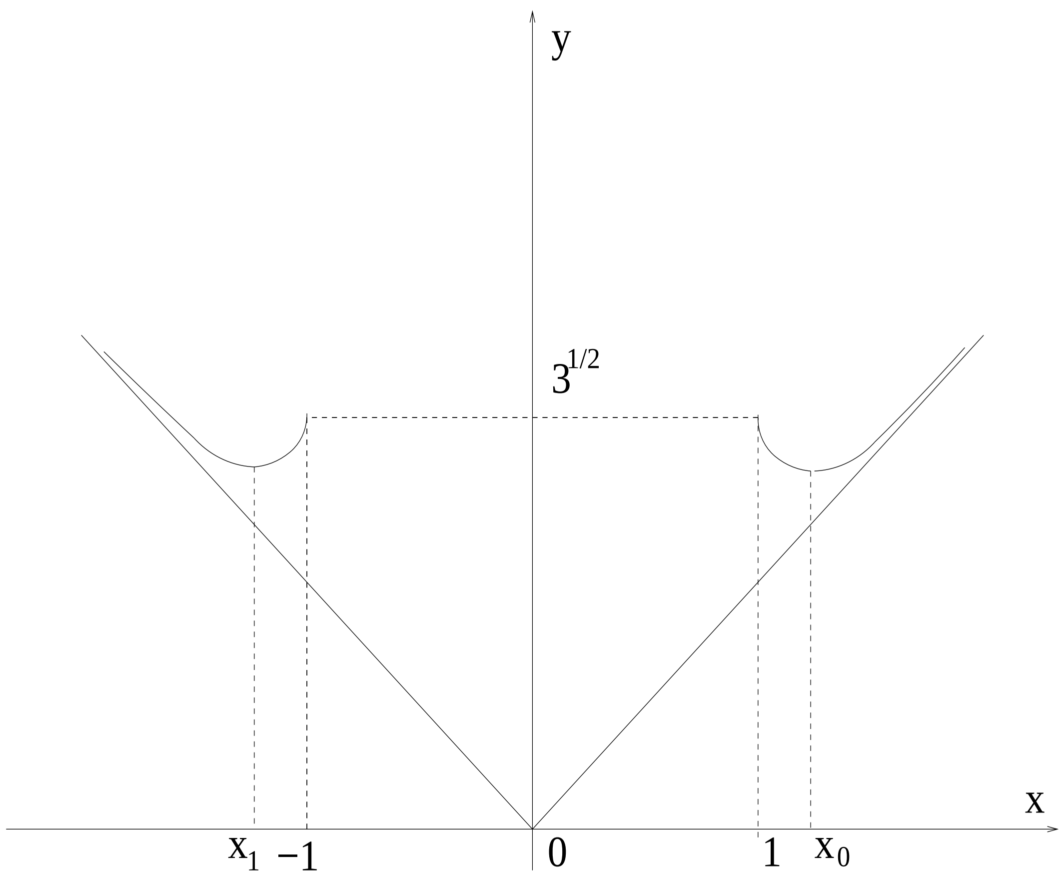
Risulta $f''(x) > 0$, per $x > 1$. Infatti, tenendo presente che $4x^2 - 1 > 0$, $x^2 - 1 > 0$,

$$f''(x) > 0 \iff (4x^2-1)\sqrt{4x^2-1} > 4(x^2-1)\sqrt{x^2-1},$$

questa è vera perchè

$$(4x^2-1)\sqrt{4x^2-1} > 4(x^2-1)\sqrt{4x^2-1} > 4(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$$

La funzione risulta convessa per $x > 1$.
Per simmetria la funzione risulta convessa anche per $x < -1$. Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



Esercizio 3 a)

Essendo l'esponenziale un infinito di ordine superiore a qualunque potenza di x (per x che tende a $+\infty$) in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{4x}} = 0,$$

possiamo dedurre, dalla definizione di limite con $\varepsilon = 1$, che esiste $x_0 > 0$ tale che per ogni $x > x_0$

$$x^n < e^{4x}.$$

Da questo possiamo scrivere, per ogni $x > x_0$

$$\frac{x^n}{e^{5x}} < \frac{e^{4x}}{e^{5x}} = \frac{1}{e^x}.$$

La funzione e^{-x} è integrabile su $[x_0, +\infty)$ in quanto

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x} = e^{-x_0}.$$

Queste osservazioni ci permettono di concludere, tenuto conto che la funzione integranda è positiva ed utilizzando il teorema del confronto per gli integrali impropri, che l'integrale assegnato esiste finito.

Esercizio 3 b)

Per $n = 0$ l'identità e' banalmente verificata in quanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{5x}}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-5x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{1}{5} e^{-5x} \right]_0^c = \frac{1}{5}$$

Dimostriamo il passo induttivo (ovvero l'induttività), considerando

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{e^{5x}}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c x^{n+1}\, e^{-5x}\, dx =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left\{ \left[-\frac{1}{5}\, e^{-5x}\, x^{n+1} \right]_0^c + \frac{1}{5} \int_0^c (n+1) \frac{x^n}{e^{5x}} \right\} = \lim_{c \to +\infty} \frac{n+1}{5} \int_0^c \frac{x^n}{e^{5x}}\, dx =$$

$$= \frac{n+1}{5} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{5x}} =$$

(Per l'ipotesi induttiva)

$$= \frac{n+1}{5} \frac{n!}{5^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{5^{n+2}}.$$

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Per questo possiamo applicare il criterio del confronto asintotico dopo aver osservato che l'infinito più forte al numeratore è $n!$ mentre al denominatore è n^n, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty.$$

Confrontiamo il termine generale della serie data con la successione $\frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n!+2^n}{n^n+1}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(1+\frac{2^n}{n!}\right)}{n^n\left(1+\frac{1}{n^n}\right)} \frac{n^n}{n!} = 1.$$

Quindi **la serie data converge** in quanto si comporta come la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n},$$

che a sua volta converge in quanto per il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 4 febbraio 2017
Fila 2.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 9) Data l'equazione:

$$\overline{z}^3(-1+i) - 125 = 0$$

a) (punti 6) determinare tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ che la verificano;

b) (punti 3) dimostrare che la somma di tutte le radici è zero.

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

a) (punti 4) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{4x}}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) (punti 2) dimostrare che esiste finito mediante uno studio a priori;

b) (punti 6) dimostrare per induzione che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{4x}}\, dx = \frac{n!}{4^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n}{n! + 5}.$$

Esercizio 1 a)

$$\overline{z}^3 = \frac{125}{-1+i} = \frac{125(-1-i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{125}{2}(-1-i) \quad \Longleftrightarrow \quad z^3 = \frac{125}{2}(-1+i)$$

Esprimiamo il numero complesso $-1-i$ in forma trigonometrica.

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi \ + \ i \ \sin\frac{3}{4}\,\pi\right),$$

da cui, applicando la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso, otteniamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z \in \left\{\frac{5}{\sqrt[6]{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i \ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right], \ \ k = 0, \, 1, \, 2\right\}.$$

Oppure in forma esponenziale

$$z \in \left\{5\sqrt[3]{2}e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3})i}, \ k = 0, \, 1, \, 2\right\}$$

Esercizio 1 b)

Sfruttiamo la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica ed otteniamo

$$\sum_{k=0}^{2} e^{\frac{k2\pi}{3}i} = \frac{1-e^{2\pi\,i}}{1-e^{\frac{2}{3}\pi\,i}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2}{3}\pi\,i}} = 0.$$

Perchè $e^{2\pi\,i} = 1$.

Esercizio 2

C.E.: $(-\infty, \, -1) \cup (1, \, +\infty)$. La funzione è sempre positiva, ed inoltre è una funzione pari.
Asintoto per x che tende a $+\infty$: $y = 2x$.
Asintoto per x che tende a $-\infty$: $y = -2x$.

$$f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Per $x > 0$,

$$f'(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Quindi la funzione risulta crescente in $(\frac{\sqrt{10}}{3}, \, +\infty)$ e decrescente in $[1, \, \frac{\sqrt{10}}{3})$.
Il punto $x_0 = \frac{\sqrt{10}}{3}$ è di minimo assoluto.
Per simmetria: la funzione risulta crescente in $(-\frac{\sqrt{10}}{3}, \, -1]$ e decrescente in $(-\infty, \, -\frac{\sqrt{10}}{3})$.
Il punto $x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{3}$ è di minimo assoluto.
Procediamo al calcolo della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-9}{(9x^2-1)\sqrt{9x^2-1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Risulta $f''(x) > 0$, per $x > 1$. Infatti, tenendo presente che $9x^2 - 1 > 0$, $x^2 - 1 > 0$,

$$f''(x) > 0 \iff (9x^2-1)\sqrt{9x^2-1} > 9(x^2-1)\sqrt{x^2-1},$$

questa è vera perchè

$$(9x^2-1)\sqrt{9x^2-1} > 9(x^2-1)\sqrt{9x^2-1} > 9(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$$

La funzione risulta convessa per $x > 1$.
Per simmetria la funzione risulta convessa anche per $x < -1$.
Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il grafico approssimato di f (vedi grafico Fila 1).

Esercizio 3a e 3b: vedi soluzione del 3a e 3b della Fila 1.

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Per questo possiamo applicare il criterio del confronto asintotico dopo aver osservato che l'infinito più forte al numeratore è 3^n mentre al denominatore è $n!$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n} = +\infty,$$

Confrontiamo il termine generale della serie data con la successione $\frac{3^n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^n+n}{n!+5}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(1+\frac{n}{3^n}\right)}{n!\left(1+\frac{5}{n!}\right)} \frac{n!}{3^n} = 1.$$

Quindi **la serie data converge** in quanto si comporta come la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!},$$

che a sua volta converge in quanto per il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0 < 1.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 4 febbraio 2017
Fila 3.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 9) Data l'equazione:

$$\overline{z}^5(-1-i) - 243 = 0$$

a) (punti 6) determinare tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ che la verificano;

b) (punti 3) dimostrare che la somma di tutte le radici è zero.

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

a) (punti 4) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{6x}}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) (punti 2) dimostrare che esiste finito mediante uno studio a priori;

b) (punti 6) dimostrare per induzione che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{6x}}\, dx = \frac{n!}{6^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 2}{4^n + n^2}.$$

Esercizio 1 a)

$$\overline{z}^5 = \frac{243}{-1-i} = \frac{243(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{243}{2}(-1+i) \iff z^5 = \frac{243}{2}(-1-i)$$

Esprimiamo il numero complesso $-1-i$ in forma trigonometrica.

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi \; + \; i\;\sin\frac{5}{4}\,\pi\right),$$

da cui, applicando la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso, otteniamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z \in \left\{\frac{3}{\sqrt[10]{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{5}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{5}\right)\right],\;\; k = 0,\,1,\,2,\,3,\,4\right\}.$$

Oppure in forma esponenziale

$$z \in \left\{\frac{3}{\sqrt[10]{2}}e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{5})i},\;\; k = 0,\,1,\,2,\,3,\,4\right\}$$

Esercizio 1 b)

Sfruttiamo la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica ed otteniamo

$$\sum_{k=0}^{4} e^{\frac{k2\pi}{5}\,i} = \frac{1-e^{2\pi\,i}}{1-e^{\frac{2}{5}\pi\,i}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2}{5}\pi\,i}} = 0.$$

Perchè $e^{2\pi\,i} = 1$.

Esercizio 2

C.E.: $(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$. La funzione è sempre positiva, ed inoltre è una funzione pari.
Asintoto per x che tende a $+\infty$: $y = 3x$.
Asintoto per x che tende a $-\infty$: $y = -3x$.

$$f'(x) = \frac{16x}{\sqrt{16x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Per $x > 0$

$$f'(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Quindi la funzione risulta crescente in $(\frac{\sqrt{17}}{4},\,+\infty)$ e decrescente in $[1,\,\frac{\sqrt{17}}{4})$.
Il punto $x_0 = \frac{\sqrt{17}}{4}$ è di minimo assoluto.
Per simmetria: la funzione risulta crescente in $(-\frac{\sqrt{17}}{4},\,-1]$ e decrescente in $(-\infty,\,-\frac{\sqrt{17}}{4})$.
Il punto $x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4}$ è di minimo assoluto.
Procediamo al calcolo della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-16}{(16x^2-1)\sqrt{16x^2-1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Risulta $f''(x) > 0$, per $x > 1$. Infatti, tenendo presente che $16x^2 - 1 > 0$, $x^2 - 1 > 0$,

$$f''(x) > 0 \iff (16x^2 - 1)\sqrt{16x^2 - 1} > 16(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1},$$

questa è vera perchè

$$(16x^2 - 1)\sqrt{16x^2 - 1} > 16(x^2 - 1)\sqrt{16x^2 - 1} > 16(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$$

La funzione risulta convessa per $x > 1$.
Per simmetria la funzione risulta convessa anche per $x < -1$.
Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il grafico approssimato di f (vedi grafico Fila 1).

Esercizio 3a e 3b: vedi soluzione del 3a e 3b della Fila 1.

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Per questo possiamo applicare il criterio del confronto asintotico dopo aver osservato che l'infinito più forte al numeratore è n^3 mentre al denominatore è 4^n, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{n^2} = +\infty.$$

Confrontiamo il termine generale della serie data con la successione $\frac{n^3}{4^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3+2}{4^n+n^2}}{\frac{n^3}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{2}{n^3}\right)}{4^n\left(1 + \frac{n^2}{4^n}\right)} \frac{4^n}{n^3} = 1.$$

Quindi **la serie data converge** in quanto si comporta come la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n},$$

che a sua volta converge in quanto per il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{n^3}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4} < 1.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 4 febbraio 2017
Fila 4.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 9) Data l'equazione:

$$\bar{z}^6 i + 729 = 0$$

a) (punti 6) determinare tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ che la verificano;

b) (punti 3) dimostrare che la somma di tutte le radici è zero.

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{25x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

a) (punti 4) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{6x}}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) (punti 2) dimostrare che esiste finito mediante uno studio a priori;

b) (punti 6) dimostrare per induzione che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{6x}}\, dx = \frac{n!}{6^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 + 10^n}{7 + n^n}.$$

Esercizio 1 a)

$$\overline{z}^6 = -\frac{729}{i} = \frac{729\,i}{i\;\;i} = 729i \quad \Longleftrightarrow \quad z^6 = 729\;\;(-i)$$

Esprimiamo il numero complesso $-i$ in forma trigonometrica.

$$-i = \left(\cos\frac{3}{2}\pi \;\;+\;\; i\;\sin\frac{3}{2}\,\pi\right),$$

da cui, applicando la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso, otteniamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z \in \left\{3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\;\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right)\right],\;\; k = 0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\right\}.$$

Oppure in forma esponenziale

$$z \in \left\{3e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3})i},\;k = 0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\right\}$$

Esercizio 1 b)

Sfruttiamo la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica ed otteniamo

$$\sum_{k=0}^{5} e^{\frac{k\pi}{3}i} = \frac{1-e^{2\pi\,i}}{1-e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{\pi}{3}i}} = 0.$$

Perchè $e^{2\pi\,i} = 1$.

Esercizio 2

C.E.: $(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$. La funzione è sempre positiva, ed inoltre è una funzione pari.

Asintoto per x che tende a $+\infty$: $y = 4x$.

Asintoto per x che tende a $-\infty$: $y = -4x$.

$$f'(x) = \frac{25x}{\sqrt{25x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Per $x > 0$

$$f'(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Quindi la funzione risulta crescente in $(\frac{\sqrt{26}}{5},\,+\infty)$ e decrescente in $[1,\,\frac{\sqrt{26}}{5})$.

Il punto $x_0 = \frac{\sqrt{26}}{5}$ è di minimo assoluto.

Per simmetria: la funzione risulta crescente in $(-\frac{\sqrt{26}}{5},\,-1]$ e decrescente in $(-\infty,\,-\frac{\sqrt{26}}{5})$.

Il punto $x_1 = -\frac{\sqrt{26}}{5}$ è di minimo assoluto.

Procediamo al calcolo della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-25}{(25x^2-1)\sqrt{25x^2-1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Risulta $f''(x) > 0$, per $x > 1$. Infatti, tenendo presente che $16x^2 - 1 > 0$, $x^2 - 1 > 0$,

$$f''(x) > 0 \iff (16x^2 - 1)\sqrt{16x^2 - 1} > 16(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1},$$

questa è vera perchè

$$(16x^2 - 1)\sqrt{16x^2 - 1} > 16(x^2 - 1)\sqrt{16x^2 - 1} > 16(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$$

La funzione risulta convessa per $x > 1$.
Per simmetria la funzione risulta convessa anche per $x < -1$.
Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il grafico approssimato di f (vedi grafico Fila 1).

Esercizio 3a e 3b: vedi soluzione del 3a e 3b della Fila 1.

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Per questo possiamo applicare il criterio del confronto asintotico dopo aver osservato che l'infinito più forte al numeratore è n^3 mentre al denominatore è 4^n, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{n^2} = +\infty.$$

Confrontiamo il termine generale della serie data con la successione $\frac{n^3}{4^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3+2}{4^n+n^2}}{\frac{n^3}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{4^n\left(1+\frac{n^2}{4^n}\right)}\frac{4^n}{n^3} = 1.$$

Quindi **la serie data converge** in quanto si comporta come la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n^3}{4^n},$$

che a sua volta converge in quanto per il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{n^3}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4} < 1.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 4 febbraio 2017
Fila 4.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 9) Data l'equazione:

$$\overline{z}^6 i + 729 = 0$$

a) (punti 6) determinare tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ che la verificano;

b) (punti 3) dimostrare che la somma di tutte le radici è zero.

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{25x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

a) (punti 4) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{6x}}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) (punti 2) dimostrare che esiste finito mediante uno studio a priori;

b) (punti 6) dimostrare per induzione che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^{6x}}\, dx = \frac{n!}{6^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 + 10^n}{7 + n^n}.$$

Esercizio 1 a)

$$\overline{z}^6 = -\frac{729}{i} = \frac{729\,i}{i\ i} = 729i \quad \Longleftrightarrow \quad z^6 = 729\ (-i)$$

Esprimiamo il numero complesso $-i$ in forma trigonometrica.

$$-i = \left(\cos\frac{3}{2}\pi \ + \ i\ \sin\frac{3}{2}\,\pi\right),$$

da cui, applicando la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso, otteniamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z \in \left\{3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)\right],\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\right\}.$$

Oppure in forma esponenziale

$$z \in \left\{3e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3})i},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\right\}$$

Esercizio 1 b)

Sfruttiamo la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica ed otteniamo

$$\sum_{k=0}^{5} e^{\frac{k\pi}{3}i} = \frac{1-e^{2\pi\,i}}{1-e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{\pi}{3}i}} = 0.$$

Perchè $e^{2\pi\,i} = 1$.

Esercizio 2

C.E.: $(-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$. La funzione è sempre positiva, ed inoltre è una funzione pari.
Asintoto per x che tende a $+\infty$: $y = 4x$.
Asintoto per x che tende a $-\infty$: $y = -4x$.

$$f'(x) = \frac{25x}{\sqrt{25x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Per $x > 0$

$$f'(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Quindi la funzione risulta crescente in $(\frac{\sqrt{26}}{5},\ +\infty)$ e decrescente in $[1,\ \frac{\sqrt{26}}{5})$.
Il punto $x_0 = \frac{\sqrt{26}}{5}$ è di minimo assoluto.
Per simmetria: la funzione risulta crescente in $(-\frac{\sqrt{26}}{5},\ -1]$ e decrescente in $(-\infty,\ -\frac{\sqrt{26}}{5})$.
Il punto $x_1 = -\frac{\sqrt{26}}{5}$ è di minimo assoluto.
Procediamo al calcolo della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-25}{(25x^2-1)\sqrt{25x^2-1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Risulta $f''(x) > 0$, per $x > 1$. Infatti, tenendo presente che $25x^2 - 1 > 0$, $x^2 - 1 > 0$,

$$f''(x) > 0 \iff (25x^2 - 1)\sqrt{25x^2 - 1} > 25(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1},$$

questa è vera perchè

$$(25x^2 - 1)\sqrt{25x^2 - 1} > 25(x^2 - 1)\sqrt{25x^2 - 1} > 25(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$$

La funzione risulta convessa per $x > 1$.
Per simmetria la funzione risulta convessa anche per $x < -1$.
Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il grafico approssimato di f (vedi grafico Fila 1).

Esercizio 3a e 3b: vedi soluzione del 3a e 3b della Fila 1.

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Per questo possiamo applicare il criterio del confronto asintotico dopo aver osservato che l'infinito più forte al numeratore è 10^n mentre al denominatore è n^n, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n^5} = +\infty.$$

Confrontiamo il termine generale della serie data con la successione $\frac{10^n}{n^5}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^5+10^n}{7+n^n}}{\frac{10^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n\left(\frac{n^5}{10^n}+1\right)}{n^n\left(\frac{7}{n^n}+1\right)} \frac{n^n}{10^n} = 1.$$

Quindi **la serie data converge** in quanto si comporta come la serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{10^n}{n^n},$$

che a sua volta converge in quanto per il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{10^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 < 1.$$

Perchè

$$\lim_{\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$