Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 10 giugno 2017
Fila 1.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Deteminare modulo e argomento delle soluzioni della seguente equazione nel campo complesso

$$(1+\sqrt{3}\,i)\,z^4 = 4\,(1-\sqrt{3}\,i).$$

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \dfrac{x^2}{e^{-\frac{8}{x^4}} + x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

a) (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) dimostrare che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

d) (punti 2) determinare i punti di massimo e di minimo assoluto se esistono;

e) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Dato l'integrale

$$\int_0^{16} \left(\arctan \frac{\sqrt[4]{x}}{2} + \arctan \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \right) \, dx$$

a) (punti 2) Dimostrare che esiste finito, senza calcolarlo, mediante uno studio a priori della funzione integranda;

b) (punti 6) calcolare il suo valore.

4. (Punti 8) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{n! + 5n^2}{(n+1)! + 3^n}.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 10 giugno 2017
Fila 2.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Deteminare modulo e argomento delle soluzioni della seguente equazione nel campo complesso

$$(-1 + \sqrt{3}\, i)\, z^5 = (1 + \sqrt{3}\, i)\, \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \dfrac{x^4}{x^4 + e^{-\frac{8}{x^2}}} & x \neq 0, \end{cases}$$

a) (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) dimostrare che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

d) (punti 2) determinare i punti di massimo e di minimo assoluto se esistono;

e) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Dato l'integrale

$$\int_0^{256} \left(\arctan \frac{\sqrt[8]{x}}{2} + \arctan \frac{2}{\sqrt[8]{x}} \right) \, dx$$

a) (punti 2) Dimostrare che esiste finito, senza calcolarlo, mediante uno studio a priori della funzione integranda;

b) (punti 6) calcolare il suo valore.

4. (Punti 8) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n + 4^n + 3n^2}{n\, 5^n + n^{10} + 1}.$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 1

Esercizio 1.

Trasformiamo l'equazione portando al secondo membro il coefficiente di z^4 e sviluppiamo l'espressione moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore

$$z^4 = \frac{4(1-\sqrt{3}\,i)}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{4(1-\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)} = -2 - 2\sqrt{3}\,i$$

Il numero complesso $-2-2\sqrt{3}\,i$ ha come modulo 4 e argomento $\theta = \frac{4}{3}\pi$. Applichiamo quindi ad esso la formula delle radici ennesime di un numero complesso

$$z \in \left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\,\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\,\frac{\pi}{2}\right)\right],\ \ k=0,\,1,\,2,\,3\right\}$$

Le quattro soluzioni dell'equazione hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3},\ \ \theta_1 = \frac{5\,\pi}{6},\ \ \theta_2 = \frac{4\,\pi}{3},\ \ \theta_3 = \frac{11\,\pi}{6}.$$

Esercizio 2.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è positiva. Inoltre è una funzione pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Il seguente limite ci fornisce il suo andamento all'infinito (abbiamo messo in evidenza x^2 al denominatore):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^2}+1} = 1,$$

perchè, cambiando variabile nel limite $t = \frac{1}{x}$, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^2} = \lim_{t\to0+} \frac{t^2}{e^{8t^4}} = 0.$$

Quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale per la funzione quando x tende a più infinito e, per la simmetria di f, anche per x che tende a meno infinito.
La funzione risulta continua e derivabile su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ in quanto composizione di funzioni continue e derivabili. Esaminiamo la sua continuità in $x = 0$ calcolando il seguente limite:

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{1}{\frac{e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^2}+1} = 1.$$

Anche in questo caso abbiamo messo in evidenza x^2 ed abbiamo tenuto conto del seguente limite, dopo aver fatto il cambio di variabile $x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{x\to0+} \frac{e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{8t^4}} = 0,$$

perchè l'infinito dell'esponenziale è più forte di quello polinomiale. Ovviamente lo stesso risultato si ottiene per x che tende a 0^-. Possiamo quindi dedurre che la funzione risulta continua anche in $x = 0$ in quanto $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Studiamo la sua derivabilità in $x = 0$ calcolando $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ed applicando il criterio di derivabilità([1]).

$$f'(x) = \frac{2\, e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^3}\ \frac{(x^4 - 16)}{\left(e^{-\frac{8}{x^4}} + x^2\right)^2}$$

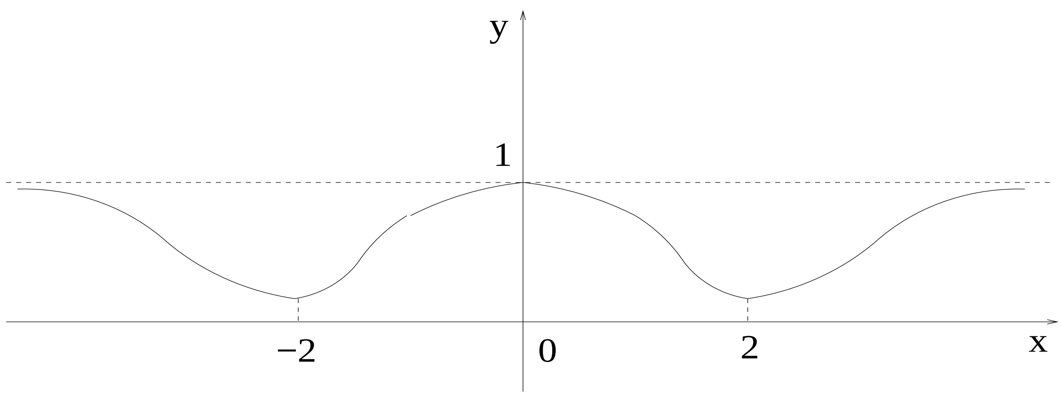
Quindi, mettendo in evidenza x^2 al denominatore e ragionando come per il limite visto in precedenza

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\, e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^3}\ \frac{(x^4 - 16)}{\left(e^{-\frac{8}{x^4}} + x^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^7}\ \frac{(x^4 - 16)}{\left(\frac{e^{-\frac{8}{x^4}}}{x^2} + 1\right)^2} = 0.$$

Essendo la funzione continua in $x = 0$, per il criterio di derivabilità otteniamo che la funzione è derivabile in questo punto e risulta

$$f'(0) = 0.$$

Il segno di f', per $x > 0$ è determinato dal segno del polinomio $x^4 - 16$ che risulta positivo se $x > 2$, negativo per $0 < x < 2$. Quindi la funzione risulta crescente per $x > 2$ e decrescente nell'intervallo $(0, 2)$. Nel punto $x = 2$ ha un minimo relativo che è anche assoluto. Mentre segno di f', per $x < 0$, è determinato dal segno del rapporto tra il polinomio $x^4 - 16$ e x^3, che risulta positivo se $-2 < x < 0$, negativo per $x < -2$. Quindi la funzione risulta crescente in $(-2, 0)$ e decrescente nell'intervallo $(-\infty, -2)$. Nel punto $x = -2$ ha un minimo relativo che é anche assoluto. Nel punto $x = 0$ la funzione ammette un massimo assoluto. Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico di f.



Esercizio 3

[1]**Criterio di derivabilità.** Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $[a, b] \setminus \{x_0\}$, con $a < x_0 < b$. Se esite finito $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L$ allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$.

Osserviamo che la funzione integranda

$$g(x) = \arctan \frac{\sqrt[4]{x}}{2} + \arctan \frac{2}{\sqrt[4]{x}}$$

è costante in $(0, +\infty)$ perchè si vede facilmente che $g'(x) = 0$. In particolare $g(x) = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Quindi non solo è integrabile in senso improrio nell'intervallo considerato, ma anche scondo Riemann. Tenuto conto di questo l'integrale si calcola facilmente:

$$\int_0^{16} g(x) \ dx \ = \ \int_0^{16} \frac{\pi}{2} \ dx \ = \ 8\pi.$$

Se questa proprietà non si conosce o non viene in mente, si può procedere come si farebbe con una qualunque funzione nel modo che segue.

Esercizio 3.a

La funzione integranda è costituita dalla somma di due funzioni. La prima è $\arctan \frac{\sqrt[4]{x}}{2}$ che risulta continua sull'intervallo di integrazione [0, 16], quindi è integrabile secondo Riemann. La seconda è continua su (0, 16] e ha una singolarità in $x = 0$. Si tratta quindi di vedere se essa è integrabile in senso improprio. D'altra parte risulta

$$\lim_{x \to 0+} \arctan \frac{2}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\pi}{2}.$$

Possiamo quindi prolungarla per continuità ponendola uguale a $\frac{\pi}{2}$ nel punto $x = 0$. Otteniamo in tal modo una funzione continua su tutto l'intervallo [0, 16] che risulta integrabile non solo in senso improprio ma anche secondo Riemann.

Esercizio 3.b

Effettuiamo il cambio di variabile $x = t^4$, per cui $dx = 4t^3\, dt$. Per $x = 0$, $t = 0$ e per $x = 16$, $t = 2$. Otteniamo

$$\lim_{c \to 0+} \int_c^{16} \left(\arctan \frac{\sqrt[4]{x}}{2} + \arctan \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \right) \ dx = \lim_{c \to 0+} \int_c^2 4t^3 \left(\arctan \frac{t}{2} + \arctan \frac{2}{t} \right) \ dt$$

Sviluppando ed integrando per parti:

$$\int_c^2 4t^3 \arctan \frac{t}{2} \ dt + \int_c^2 4t^3 \arctan \frac{2}{t} \ dt =$$

$$= \left[t^4 \arctan \frac{t}{2} \right]_c^2 - \frac{1}{2} \int_c^2 \frac{t^4}{1 + \frac{t^2}{4}} \ dt + \left[t^4 \arctan \frac{2}{t} \right]_c^2 - \int_c^2 \frac{t^4}{1 + \frac{4}{t^2}} \left(-\frac{2}{t^2} \right) \ dt =$$

$$= 4\,\pi - c^4 \arctan \frac{c}{2} - \int_c^2 \frac{2\,t^4}{4 + t^2} \ dt +$$

$$+ 4\,\pi - c^4 \arctan \frac{2}{c} + \int_c^2 \frac{2\,t^4}{4 + t^2} \ dt \ = \ 8\,\pi - c^4 \arctan \frac{c}{2} - c^4 \arctan \frac{2}{c}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\lim_{c\to 0+}\int_c^2 4t^3\,\left(\arctan\frac{t}{2}\,+\,\arctan\frac{2}{t}\right)\;dt\;=$$

$$\lim_{c\to 0+}\,8\,\pi\,-\,c^4\,\arctan\frac{c}{2}\,-\,c^4\,\arctan\frac{2}{c}\;=\;8\,\pi.$$

Perchè

$$\lim_{c\to 0+}c^4\,\arctan\frac{2}{c}=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s^4}\,\arctan 2s\;=0$$

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Applichiammo il criterio del confronto asintotico confrontando il termine generale di essa con la successione $\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n!\,+\,5n^2}{(n+1)!\,+\,3^n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}n\,\frac{n!\,+\,5n^2}{(n+1)!\,+\,3^n}\;=\;\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\,\frac{1\,+\,\frac{5n^2}{n!}}{1\,+\,\frac{3^n}{(n+1)!}}\;=\;1.$$

Quindi la serie data diverge perchè si comporta come la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

che diverge.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI DELLA FILA 2

Esercizio 1.

Trasformiamo l'equazione portando al secondo membro il coefficiente di z^5 e sviluppiamo l'espressione moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore

$$z^5\;=\;\frac{2}{\sqrt{3}}\;\frac{(1+\sqrt{3}\,i)}{-1+\sqrt{3}\,i}\;=\;\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(1+\sqrt{3}\,i)(-1-\sqrt{3}\,i)}{(-1+\sqrt{3}\,i)(-1-\sqrt{3}\,i)}\;=\;-\,\frac{1}{2\sqrt{3}}(-2\,+\,2\sqrt{3}\,i)$$

Il numero complesso $\frac{1}{2\sqrt{3}}(2-2\sqrt{3}\,i)$ ha come modulo $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e argomento $\theta=\frac{5}{3}\,\pi$. Applichiamo quindi ad esso la formula delle radici ennesime di un numero complesso

$$z\in\left\{\sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\,\frac{2\pi}{5}\right)\,+\,i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\,\frac{2\pi}{5}\right)\right],\;\;k=0,\,1,\,2,\,3,\,4\right\}$$

Le quattro soluzioni dell'equazione hanno modulo $\sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ e argomenti

$$\theta_0=\frac{\pi}{3},\;\;\theta_1=\frac{11\,\pi}{15},\;\;\theta_2=\frac{17\,\pi}{15},\;\;\theta_3=\frac{23\,\pi}{15},\;\;\theta_4=\frac{29\pi}{15}$$

Esercizio 2.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è positiva. Inoltre è una funzione pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Il seguente limite ci fornisce il suo andamento all'infinito (abbiamo messo in evidenza x^4 al denominatore):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{e^{-\frac{8}{x^2}}}{x^4}} = 1,$$

perchè, cambiando variabile nel limite $t = \frac{1}{x}$, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{8}{x^2}}}{x^4} = \lim_{t\to 0+} \frac{t^4}{e^{8t^2}} = 0.$$

Quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale per la funzione quando x tende a più infinito e, per la simmetria di f, anche per x che tende a meno infinito.
La funzione risulta continua e derivabile su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ in quanto composizione di funzioni continue e derivabili. Esaminiamo la sua continuità in $x = 0$ calcolando il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+\frac{e^{-\frac{8}{x^2}}}{x^4}} = 1.$$

Anche in questo caso abbiamo messo in evidenza x^2 ed abbiamo tenuto conto del seguente limite, dopo aver fatto il cambio di variabile $x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{8}{x^2}}}{x^4} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^4}{e^{8t^2}} = 0,$$

perchè l'infinito dell'esponenziale è più forte di quello polinomiale. Ovviamente lo stesso risultato si ottiene per x che tende a 0^-. Possiamo quindi dedurre che la funzione risulta continua anche in $x = 0$ in quanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Studiamo la sua derivabilità in $x = 0$ calcolando $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ ed applicando il criterio di derivabilità([2]).

$$f'(x) = 4x\, e^{-\frac{8}{x^2}}\ \frac{(x^2-4)}{\left(x^4+e^{-\frac{8}{x^2}}\right)^2}$$

Quindi, mettendo in evidenza x^4 al denominatore e ragionando come per il limite visto in precedenza

$$\lim_{x\to 0} 4x\, e^{-\frac{8}{x^2}}\ \frac{(x^2-4)}{\left(x^4+e^{-\frac{8}{x^2}}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\, e^{-\frac{8}{x^2}}}{x^7}\ \frac{(x^2-4)}{\left(1+\frac{e^{-\frac{8}{x^2}}}{x^4}\right)^2} = 0.$$

[2]**Criterio di derivabilità.** Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $[a, b] \setminus \{x_0\}$, con $a < x_0 < b$. Se esite finito $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = L$ allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$.

Essendo la funzione continua in $x = 0$, per il criterio di derivabilità otteniamo che la funzione è derivabile in questo punto e risulta

$$f'(0) = 0.$$

Il segno di f', per $x > 0$ è determinato dal segno del polinomio $x^2 - 4$ che risulta positivo se $x > 2$, negativo per $0 < x < 2$. Quindi la funzione risulta crescente per $x > 2$ e decrescente nell'intervallo $(0,\ 2)$. Nel punto $x = 2$ ha un minimo relativo che è anche assoluto. Mentre segno di f', per $x < 0$, è determinato dal segno del prodotto tra il polinomio $x^2 - 4$ e x, che risulta positivo se $-2 < x < 0$, negativo per $x < -2$. Quindi la funzione risulta crescente in $(-2,\ 0)$ e decrescente nell'intervallo $(-\infty,\ -2)$. Nel punto $x = -2$ ha un minimo relativo che é anche assoluto. Nel punto $x = 0$ la funzione ammette un massimo assoluto. Possiamo a questo punto tracciare il grafico di f che risulterà simile a quello della Fila 1.

Esercizio 3

Osserviamo che la funzione integranda

$$g(x) = \arctan \frac{\sqrt[8]{x}}{2} + \arctan \frac{2}{\sqrt[8]{x}}$$

è costante in $(0, +\infty)$ perchè si vede facilmente che $g'(x) = 0$.
In particolare $g(x) = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Quindi non solo è integrabile in senso improrio nell'intervallo considerato, ma anche scondo Riemann. Tenuto conto di questo l'integrale si calcola facilmente:

$$\int_0^{256} g(x)\ dx \ = \int_0^{256} \frac{\pi}{2}\ dx \ = \ 128\pi.$$

Se questa proprietà non si conosce o non viene in mente, si può procedere come si farebbe con una qualunque funzione nel modo che segue.

Esercizio 3.a
La funzione integranda è costituita dalla somma di due funzioni. La prima è $\arctan \frac{\sqrt[8]{x}}{2}$ che risulta continua sull'intervallo di integrazione $[0,\ 256]$, quindi è integrabile secondo Riemann. La seconda è continua su $(0,\ 256]$ e ha una singolarità in $x = 0$. Si tratta quindi di vedere se essa è integrabile in senso improprio. D'altra parte risulta

$$\lim_{x \to 0+} \arctan \frac{2}{\sqrt[8]{x}} = \frac{\pi}{2}.$$

Possiamo quindi prolungarla per continuità ponendola uguale a $\frac{\pi}{2}$ nel punto $x = 0$. Otteniamo in tal modo una funzione continua su tutto l'intervallo $[0,\ 256]$ che risulta integrabile non solo in senso improprio ma anche secondo Riemann.

Esercizio 3.b

Effettuiamo il cambio di variabile $x = t^8$, per cui $dx = 8t^7\,dt$. Per $x = 0$, $t = 0$ e per $x = 256$, $t = 2$. Otteniamo

$$\lim_{c\to 0+}\int_c^{256}\left(\arctan\frac{\sqrt[8]{x}}{2}+\arctan\frac{2}{\sqrt[8]{x}}\right)\,dx=\lim_{c\to 0+}\int_c^{2}8t^7\left(\arctan\frac{t}{2}+\arctan\frac{2}{t}\right)\,dt$$

Sviluppando ed integrando per parti:

$$\int_c^2 8t^7\arctan\frac{t}{2}\,dt+\int_c^2 8t^7\arctan\frac{2}{t}\,dt=$$

$$=\left[t^8\arctan\frac{t}{2}\right]_c^2-\frac{1}{2}\int_c^2\frac{t^8}{1+\frac{t^2}{4}}\,dt+\left[t^8\arctan\frac{2}{t}\right]_c^2-\int_c^2\frac{t^2}{1+\frac{4}{t^2}}\left(-\frac{2}{t^2}\right)\,dt=$$

$$=64\,\pi-c^8\arctan\frac{c}{2}-\int_c^2\frac{2\,t^8}{4+t^2}\,dt+$$

$$+64\,\pi-c^8\arctan\frac{2}{c}+\int_c^2\frac{2\,t^8}{4+t^2}\,dt=128\,\pi-c^8\arctan\frac{c}{2}-c^8\arctan\frac{2}{c}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\lim_{c\to 0+}\int_c^2 8t^7\left(\arctan\frac{t}{2}+\arctan\frac{2}{t}\right)\,dt=$$

$$\lim_{c\to 0+}128\,\pi-c^8\arctan\frac{c}{2}-c^8\arctan\frac{2}{c}=128\,\pi.$$

Perchè

$$\lim_{c\to 0+}c^8\arctan\frac{2}{c}=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s^8}\arctan 2s=0$$

Esercizio 4.

La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del confronto asintotico confrontando il termine generale di essa con la successione $\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5^n+4^n+3n^2}{n\,5^n+n^{10}+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}n\,\frac{5^n+4^n+3n^2}{n\,5^n+n^{10}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{4^n}{5^n}+3\frac{n^2}{5^n}}{1+\frac{n^9}{5^n}+\frac{1}{n5^n}}=1.$$

Quindi la serie data diverge perchè si comporta come la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

che diverge.