Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 22 luglio

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Risolvere il seguente sistema nel campo complesso.

$$\begin{cases} (1+\sqrt{3}\,i)\, z^{11} + 2 = 0 \\ Im\, z > 0 \\ Re\, z > 0 \end{cases}$$

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 4} - \sqrt{4x^2 - 9}$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 3) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità ed eventuali flessi;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 6)
Dimostrare, mediante uno studio a priori, che la funzione

$$g(x) = \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}$$

è integrabile in senso improprio sull'intervallo $(1, +\infty)$.

4. (Punti 8) Calcolare

$$\int_1^{+\infty} g(x)\; dx,$$

dove g è la funzione dell'esercizio 3.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1.

$$(1+\sqrt{3}\,i)\,z^{11}+2=0 \iff z^{11}=\frac{-2}{1+\sqrt{3}\,i}\,\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \iff$$

$$\iff z^{11}=-\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \iff z^{11}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{1}$$

Calcoliamo le radici undicesime del numero $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Per fare questo lo scriviamo in forma trigonometrica ed applichiamo la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso.

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione (1) sono

$$z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{33}+k\frac{2\pi}{11}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{33}+k\frac{2\pi}{11}\right),\ k=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,10.$$

Determiniamo tra queste quelle che verificano le altre due condizioni poste nel sistema: $Im\,z>0$ e $Re\,z>0$. Ovvero quelle per le quali l'argomento principale di z_k è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Si vede facilmente che questo accade per $k=0,\,1,\,2$. Infatti per $k=0$ è ovvio, mentre per $k=1$

$$\frac{2\pi}{33}+\frac{2\pi}{11}<\frac{\pi}{2} \iff \frac{8}{33}<\frac{1}{2}.$$

Per $k=2$ risulta

$$\frac{2\pi}{33}+\frac{4\pi}{11}<\frac{\pi}{2} \iff \frac{14}{33}<\frac{1}{2}.$$

Per $k\geq 3$ risulta

$$\frac{2\pi}{33}+k\frac{2\pi}{11}>\frac{\pi}{2} \iff k>\frac{29}{11}.$$

Quindi le soluzioni del sistema sono $z_0,\,z_1,\,z_2$.

Esercizio 2.

Il campo di esistenza della funzione è dato dai valori di x che rendono positivi i radicandi e si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 9x^2-4 \geq 0 \\ 4x^2-9 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\leq -\frac{2}{3}\vee x\geq\frac{2}{3} \\ x\leq -\frac{3}{2}\vee x\geq\frac{3}{2} \end{cases} \implies x\leq -\frac{3}{2}\vee x\geq\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Quindi il campo di esistenza di f è l'insieme $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$. La funzione all'infinito assume una forma indeterminata $(+\infty - \infty)$ che risolviamo nel modo che segue

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 - 4} - \sqrt{4x^2 - 9})(\sqrt{9x^2 - 4} + \sqrt{4x^2 - 9})}{\sqrt{9x^2 - 4} + \sqrt{4x^2 - 9}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2 + 5}{\sqrt{9x^2 - 4} + \sqrt{4x^2 - 9}} = +\infty$$

Si può anche più semplicemente procedere così.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x| \left[3\sqrt{1 - \frac{4}{9x^2}} - 2\sqrt{1 - \frac{9}{4x^2}}\right] = +\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} \left[3\sqrt{1 - \frac{4}{9x^2}} - 2\sqrt{1 - \frac{9}{4x^2}}\right] = \pm 1.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} x \left[3\sqrt{1 - \frac{4}{9x^2}} - 2\sqrt{1 - \frac{9}{4x^2}} - 1\right] =$$

(utilizziamo lo sviluppo di Taylor: $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $t = -\frac{4}{9x^2}$, nella prima radice e $t = -\frac{9}{4}x^2$ nella seconda)

$$= \lim_{x\to+\infty} x \left\{3\left[1 - \frac{2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - 2\left[1 - \frac{9}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - 1\right\} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{19}{12x^2} = 0.$$

Procedendo nello stesso modo, per x che tende a meno infinito, si ottiene

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \left[3(-x)\sqrt{1 - \frac{4}{9x^2}} - 2(-x)\sqrt{1 - \frac{9}{4x^2}} + x\right] = ... = 0.$$

Gli asintoti obliqui sono:
per x che tende a più infinito: $y = x$, per x che tende a meno infinito; $y = -x$.

Studiamo ora gli intervalli di monotonia della funzione mediante la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 - 4}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 9}}.$$

Da questa, per $x > \frac{3}{2}$, quindi $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{9}{\sqrt{9x^2 - 4}} > \frac{4}{\sqrt{4x^2 - 9}} \iff$$

$$\iff 81(4x^2 - 9) > 16(9x^2 - 4) \iff 20x^2 - 65 > 0 \implies x > \sqrt{\frac{133}{36}} > \frac{3}{2}.$$

Da questo possiamo dedurre che la funzione è crescente sull'intervallo $(\sqrt{\frac{133}{36}}, +\infty)$ e decrescente su $[\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{133}{36}})$, quindi $x_1 = \sqrt{\frac{133}{36}}$ è punto di minimo relativo, in questo caso anche assoluto. Tenendo presente che la funzione è pari deduciamo anche che è decrescente sull'intervallo $(-\infty, -\sqrt{\frac{133}{36}})$ e crescente su $(-\sqrt{\frac{133}{36}}, -\frac{3}{2}]$, quindi $x_2 = -\sqrt{\frac{133}{36}}$ è punto di minimo relativo, in questo caso anche assoluto.
Infine

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{3}{2}^-} f'(x) = +\infty,$$

ovvero il grafico nei punti $x = \frac{3}{2}$ e $x = -\frac{3}{2}$ ha tangente verticale. Inoltre questi sono anche punti di massimo relativo.

Valutiamo gli intervalli di concavità e di convessità di f studiando il segno della derivata seconda.

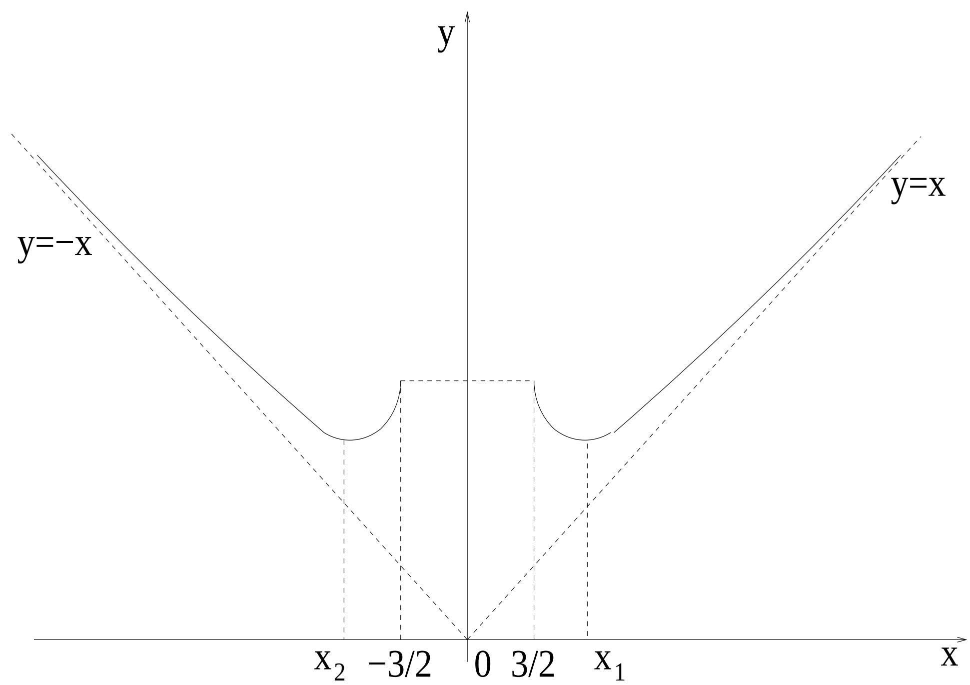
$$f''(x) = \frac{-36}{(9x^2-4)\sqrt{9x^2-4}} + \frac{36}{(4x^2-9)\sqrt{4x^2-9}}.$$

Da questa, per i valori di x che appartengono al campo di esistenza di f:

$$f''(x) > 0 \iff \frac{1}{(9x^2-4)\sqrt{9x^2-4}} < \frac{1}{(4x^2-9)\sqrt{4x^2-9}} \iff$$

$$\iff 9x^2 - 4 > 4x^2 - 9 \iff x^2 > -5,$$

che è sempre verificata, quindi f è convessa sul suo campo di esistenza.
Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico di f.



Si osservi che la funzione è pari: $f(x) = f(-x)$. È possibile quindi limitarsi a studiarla per $x > 0$ e poi fare una simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

Esercizio 3.

La funzione non è limitata nell'intorno del punto $x = 1$, inoltre non ammettendo altri punti singolari nell'intervallo considerato, possiamo studiare l'integrabilità di g separatamente, ad esempio, su $(1, 2]$ e $[2, +\infty)$. Dobbiamo provare la sua integrabilità su questi intervalli.
Nell'intervallo $(1,\ 2]$ risulta $g(x) < 0$, per cui consideriamo il suo valore assoluto e proviamo che $|g(x)|$ è integrabile mediante il criterio del confronto:

$$|g(x)| \;=\; \left|\frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\right| \;\leq\; |\log(x-1)|\,\frac{1}{64}.$$

perchè la funzione $x \longrightarrow \frac{1}{(x+15)\sqrt{x+15}}$ risulta decrescente sull'intervallo considerato, basta fare la derivata prima e veder che è negativa. La funzione $x \to |\log(x-1)|$ è integrabile su $(1, 2]$ come si vede dai seguenti calcoli

$$\int_1^2 |\log(x-1)|\ dx \;=\; -\int_0^1 \log t\ dt \;=\; -\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \log t\ dt \;=\; -\lim_{c\to 0^+}\left[t\log t \,-\, t\right]_c^1 \;=\; 1$$

Su $[2,\ +\infty)$ la funzione risulta positiva. Anche in questo caso possiamo applicare il criterio del confronto tenendo presente che valgono le seguenti maggiorazioni:

$$(x+15)\sqrt{x+15} > x\sqrt{x} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{(x+15)\sqrt{x+15}} < \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

mentre per x grande si verifica, ad esempio, $\log(x-1) < \sqrt[4]{x}$.
Quindi per x sufficientemente grande

$$0 < g(x) \;=\; \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}} \;\leq\; \log(x-1)\,\frac{\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}} \;=\; \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}.$$

La funzione $x \longrightarrow \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ risulta integrabile sull'intervallo $[2,\ +\infty)$ (il suo esponente è maggiore di uno), quindi, per il criterio del confronto, anche g lo è.

Esercizio 4.

$$\int_1^{+\infty} g(x)\ dx \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx \;=$$

$$=\; \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx \;+\; \lim_{c\to+\infty}\int_2^c \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx.$$

Procediamo al calcolo delle primitive di g mediante l'integrazione per parti osservando che

$$\frac{1}{(x+15)\sqrt{x+15}} = (x+15)^{-\frac{3}{2}} = -2\frac{d}{dx}\,(x+15)^{-\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\int \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx \ = \ -2\ \frac{1}{\sqrt{x+15}}\ \log(x-1)\ + 2\int \frac{1}{\sqrt{x+15}}\ \frac{1}{x-1}\ dx$$

Nell'ultimo integrale effettuiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{x+15}$, quindi $t^2 = x+15$ e $dx = 2t\,dt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+15}}\ \frac{1}{x-1}\ dx \ = \ 2\int \frac{1}{t^2\ -16}\ dt.$$

Applichiamo la tecnica di risoluzione degli integrali di funzioni razionali determinando i valori dei numeri reali A e B per i quali si verifica:

$$\frac{1}{t^2-16} \ = \ \frac{A}{t-4} + \frac{B}{t+4} = \frac{A(t+4)+B(t-4)}{t^2-16},$$

che implica

$$A(t+4)+B(t-4) = 1$$

da questa per $t = 4$ otteniamo $A = \frac{1}{8}$ mentre per $t = -4$ $B = -\frac{1}{8}$. Sostituiamo

$$\int \frac{1}{t-16}\ dt \ = \ \frac{1}{8}\int \frac{1}{t-4}\ dt\ -\ \frac{1}{8}\int \frac{1}{t+4}\ dt \ = \ \frac{1}{8}\log\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + C.$$

Tornando all'integrale di partenza

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+15}}\ \frac{1}{x-1}\ dx \ = \ \frac{1}{4}\log\left|\frac{\sqrt{x+15}-4}{\sqrt{x+15}+4}\right| + C.$$

Infine

$$\int \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx \ = \ -2\ \frac{1}{\sqrt{x+15}}\ \log(x-1)\ +\ \frac{1}{2}\ \log\left|\frac{\sqrt{x+15}-4}{\sqrt{x+15}+4}\right| + C.$$

Tenuto conto di questo

$$\int_1^{+\infty} g(x)\ dx \ = \ \int_1^{+\infty} \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx \ =$$

$$= \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx\ +\ \lim_{c\to+\infty}\int_2^c \frac{\log(x-1)}{(x+15)\sqrt{x+15}}\ dx =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} 2\ \frac{1}{\sqrt{c+15}}\ \log(c-1)\ -\ \frac{1}{2}\ \log\left|\frac{\sqrt{c+15}-4}{\sqrt{c+15}+4}\right| +$$

$$+ \lim_{c\to+\infty} -2\ \frac{1}{\sqrt{c+15}}\ \log(c-1)\ +\ \frac{1}{2}\ \log\left|\frac{\sqrt{c+15}-4}{\sqrt{c+15}+4}\right| \ =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} 2\ \frac{1}{\sqrt{c+15}}\ \log(c-1)\ -\ \frac{1}{2}\ \log(\sqrt{c+15}-4) + \frac{1}{2}\log(\sqrt{c+15}+4)\ +\ 0\ +\ \frac{1}{2}\ \log 1\ =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} 2\ \frac{1}{\sqrt{c+15}}\ \log(c-1)\ -\ \frac{1}{2}\ \log(\sqrt{c+15}-4)\ +\ \frac{3}{2}\ \log 2 =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \ \frac{1}{2}\,\log(c-1)\ -\frac{1}{2}\,\log(\sqrt{c+15}-4)\ +\ \frac{3}{2}\,\log 2 =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \frac{1}{2}\,\log\frac{c-1}{\sqrt{c+15}-4}\ +\ \frac{3}{2}\,\log 2 =$$

(cambio variabile $s = c-1$, quindi per c che tende a 1^+ si ha che s tende a 0^+)

$$= \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{2}\,\log\frac{s}{\sqrt{s+16}-4}\ +\ \frac{3}{2}\,\log 2\ =\ 6\,\log 2.$$

Perchè, utilizzando lo sviluppo di Taylor di $(1+r)^\alpha$, con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{s}{16}$ otteniamo

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{s}{\sqrt{s+16}-4} = \lim_{s\to 0+} \frac{s}{4\left(1+\frac{s}{32}+o(s)\right)-4} = 8.$$

Oppure moltiplicando e dividendo per $\sqrt{s+16}+4$

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{s}{\sqrt{s+16}-4} = \lim_{s\to 0^+} \frac{s(\sqrt{s+16}+4)}{s} = 8.$$