

Introduzione allo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali ¹

Antonio Tarsia

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: antonio.tarsia@unipi.it

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Ruolo delle equazioni differenziali nei modelli matematici dei processi fisici.	2
1.2	Le analogie formali nelle equazioni della fisica matematica	2
1.3	Alcuni problemi della fisica matematica.	3
1.4	Una panoramica dei principali problemi riguardanti le equazioni differenziali.	8
1.5	Condizioni iniziali e condizioni al bordo	11
1.6	Il concetto di problema ben posto nel senso di Hadamard	12
1.7	I limiti di applicabilità dei modelli matematici.	14
1.8	Generalità sulle equazioni alle derivate parziali	14
1.9	Breve cenno alle equazioni di ordine superiore ed ai sistemi	19
2	L'equazione delle onde	23
2.1	Esempi di risoluzione con metodi elementari di alcune equazioni alle derivate parziali	23
2.2	Un esempio di risoluzione per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale	25
2.3	Il problema di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per l'equazione delle onde unidimensionale	29
3	L'operatore Δ	37
3.1	L'operatore Δ e il calcolo delle variazioni.	37
3.2	I funzionali dell'energia corrispondenti a modelli di membrana elastica e di piastra sottile.	39
3.3	Il principio di massimo per l'operatore di Laplace.	40
3.4	Ricerca di soluzioni con simmetria sferica	43
3.5	Un metodo elementare per la risoluzione dell'equazione di Laplace.	45
4	Appendice	51
4.1	Integrali di Lebesgue	51
4.2	Spazi di Banach e di Hilbert	55
4.3	Forme bilineari	57
4.4	Spazi di Sobolev	57
4.5	Un teorema di esistenza di soluzioni deboli di equazioni ellittiche.	58
5	Bibliografia	60
5.1	Commento bibliografico	60

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Ruolo delle equazioni differenziali nei modelli matematici dei processi fisici.

Le equazioni differenziali sono uno strumento fondamentale di studio nella fisica matematica. Ciò è dovuto all'enorme possibilità di usarle per descrivere la dipendenza tra i parametri di vario genere che intervengono nei fenomeni che si considerano. Nell'affrontare lo studio di un fenomeno fisico la prima cosa da fare è isolare le quantità che lo caratterizzano. Queste quantità possono essere la densità, la massa, la velocità, la temperatura e così via. Il passo successivo è scegliere e stabilire matematicamente le leggi fisiche che possono essere applicate come fondamenti della teoria del fenomeno considerato e che di solito sono il risultato di generalizzazioni di esperimenti ed osservazioni. Queste leggi devono essere possibilmente semplici e senza contraddizioni; generalmente sono scritte in forma di relazione tra le caratteristiche fondamentali del fenomeno e le loro derivate in un dato punto dello spazio ed in un dato istante di tempo. La possibilità di costruire tali espressioni è essenzialmente una conseguenza della localizzazione di tutte le interazioni note. Comunque nel dedurre le equazioni è spesso conveniente partire da qualche legge di conservazione (ad esempio: conservazione della massa, dell'energia, del momento ecc.) che sono generalmente in forma integrale, quindi non locale, e dopo passare alle equazioni locali assumendo ipotesi di "regolarità" delle quantità che si studiano.

1.2 Le analogie formali nelle equazioni della fisica matematica

Fenomeni fisici di diverso tipo possono venire espressi con equazioni della stessa forma che differiscono solo per il significato dei simboli. Vediamo alcuni esempi.

Un'equazione della forma

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi f(x, y, z)$$

si presenta

- (a) nella cinematica dei fluidi incompressibili (u è il potenziale della velocità, $f = 0$),
- (b) nella teoria dell'attrazione newtoniana (u è il potenziale della gravitazione, f la densità di massa),
- (c) nell'elettrostatica e nella magnetostatica (u è il potenziale elettrico, f è la densità elettrica oppure u è il potenziale magnetico $f = 0$).

Un'equazione della forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\pi f(x, y, z, t)$$

si presenta:

- (a) nelle oscillazioni dei corpi elastici dove u è componente di spostamento o potenziale degli spostamenti, $f = 0$, mentre v dipende dalla densità di massa e dalle cosiddette costanti di Lamé⁽¹⁾
- (b) nell'elettromagnetismo (u è la componente del campo elettrico o magnetico, $f = 0$ e v dipende da costante dielettrica e dalla permeabilità)
- (c) nell'elettromagnetismo (u è il potenziale scalare o componente del potenziale vettore, v dipende dalla costante dielettrica e dalla permeabilità, f è la densità elettrica o componente della densità di corrente che moltiplicata per le costanti del sistema)

L'equazione

$$\Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

si presenta

- (a) nella conduzione del calore (u è la temperatura e D dipende dal calore specifico, dal coefficiente di conducibilità termica e dalla densità),
- (b) nella diffusione di gas o liquidi (u è concentrazione e D il coefficiente di diffusione).

1.3 Alcuni problemi della fisica matematica.

Diamo alcuni esempi di problemi da cui derivano le equazioni alle derivate parziali che considereremo nel seguito.

Le vibrazioni elastiche di una trave.

Consideriamo una trave elastica omogenea con sezione trasversale di area S e materiale di densità ρ . Assumiamo un asse delle ascisse x parallelo alla trave e supponiamo che ciascuna sezione è sollecitata nella direzione di quest'asse x . Indichiamo con $u(x, t)$ lo spostamento all'istante t della sezione della trave i cui punti hanno ascissa x quando è in equilibrio, così che all'istante t essi avranno coordinate $x + u(x, t)$. Provvedremo a tracciare il moto della sezione giacente nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$ ⁽²⁾ dell'asse x quando in equilibrio, trascurando tutte le forze esterne agenti su esso eccetto la forza elastica agente sulla sezione congiungente il segmento al resto della trave. Determiniamo queste forze elastiche. Osserviamo che all'istante t il segmento in questione ha lunghezza $l = u(t, x + \Delta x) - u(t, x) + \Delta x$, ed il suo allungamento rispetto alla posizione di equilibrio è $\Delta l = u(t, x + \Delta x) - u(t, x)$ così che l'allungamento relativo ha la forma

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x}.$$

Passando al limite per Δx che tende a 0 che l'allungamento relativo del segmento infinitesimo situato nel punto di coordinate x quando in equilibrio è $u_{,x} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ (nella teoria dell'elasticità questo è chiamato gradiente di deformazione; per deformazioni più generali nel caso tridimensionale questo ruolo è giocato dal tensore di deformazione). Per la legge di Hooke⁽³⁾, che è un'approssimazione lineare del problema di elasticità unidimensionale che stiamo considerando, la forza agente sul lato sinistro della trave nella sezione considerata

¹Gabriel Lamé (Tours 1795 - Parigi 1870), fu professore di fisica all'École polytechnique di Parigi, oltre alla teoria dell'elasticità studiò anche calcolo delle probabilità.

² Δx indica l'incremento nel punto x . Come abbiamo visto con Δ si indica anche l'operatore (differenziale) di Laplace, non penso che ci possa essere pericolo di confusione dato che dal contesto si può capire quale dei due significati stiamo prendendo in considerazione.

Cyrille Pierre Theodore Laplace (Beaumont-en-Auge, Calvados 1749 - Parigi 1827). Fu uno dei massimi scienziati francesi dell'epoca napoleonica, si occupò di astronomia, di fisica e di matematica fornendo importanti contributi in questi campi.

³Robert Hooke (Freshwater, isola di Wight 1635 - Londra 1703) Oltre che di elasticità si occupò anche di astronomia e biologia.

è $F = ESu_{,x}(t, x)$, dove E chiamato *modulo di Young*⁽⁴⁾, caratterizza le proprietà elastiche del materiale di cui la trave è fatta. Quindi le forze agenti sul segmento considerato sono $ESu_{,x}(t, x + \Delta x)$ (da destra) e $-ESu_{,x}(t, x)$ (da sinistra), quindi la forza totale esterna è $ES[u_{,x}(t, x + \Delta x) - u_{,x}(t, x)]$. Poiché il *momento* di questo segmento è $\int_x^{x+\Delta x} \rho Su_{,t}(t, \xi) d\xi$, per la seconda legge di Newton⁽⁵⁾ abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho Su_{,t}(t, \xi) d\xi = ES[u_{,x}(t, x + \Delta x) - u_{,x}(t, x)].$$

Supponendo che u abbia le derivate continue fino al secondo ordine, possiamo derivare sotto il segno di integrale, dividere entrambi i membri per Δx passare al limite per Δx che tende a 0 ottenendo *l'equazione delle onde unidimensionale*

$$u_{,tt} = c^2 u_{,xx},$$

dove la costante $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ viene interpretata come la velocità di propagazione delle onde elastiche (suono) nella trave.

L'equazione di conduzione del calore.

Consideriamo un mezzo omogeneo consistente di una sostanza di densità ρ nello spazio tridimensionale. Sia $u(x, t)$ la temperatura di questo mezzo nel punto $x \in \mathbb{R}^3$ all'istante t . Supponiamo che u sia una funzione sufficientemente regolare nelle variabili t ed x . L'equazione relativa ad u si basa sulla legge di Fourier⁽⁶⁾

per la trasmissione del calore, ossia:

data una piccola superficie di area ΔS , allora in un piccolo intervallo di tempo Δt una quantità di calore

$$\delta Q \cong -k \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta S \Delta t,$$

passa attraverso la superficie nella direzione della normale ν . k è il coefficiente di *conduttività termica* e tiene conto della sostanza in questione. Sia ora Ω una porzione di volume del mezzo, che possiamo vedere come un sottoinsieme limitato con bordo $\partial\Omega$ regolare a tratti in \mathbb{R}^3 . La legge di conservazione dell'energia in Ω nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ assume la forma

$$\int_{\Omega} c[u(t + \Delta t, x) - u(t, x)]\rho dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial\Omega} k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt, \quad (1.1)$$

dove c è il calore specifico della sostanza, $\partial\Omega$ è il bordo della regione Ω , ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e dx è il solito elemento di volume in \mathbb{R}^3 . Applichiamo il teorema della divergenza⁽⁷⁾ nel membro destro di (1.1), ponendo, vedi nota in fondo pagina, $\Phi = \nabla u$, e tenendo conto che $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$, $div \nabla u = \Delta u$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial\Omega} k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} k \Delta u dx dt.$$

⁴Thomas Young (Milverton 1773 - Londra 1829) fu medico, fisico ed egittologo. Oltre alla teoria dell'elasticità dette un forte contributo alla teoria ondulatoria della luce.

⁵Isaac Newton (Woolsthorpe, Lincolnshire 1642 - Londra 1727) Inutile ricordare qui la mole e l'importanza delle sue opere. Mi limito a ricordare che la sua carriera scolastica non fu brillante (nel 1664 sostenne un esame di matematica: le sue conoscenze sulla materia risultarono assai scarse). Le sue conoscenze delle varie discipline in cui dette i suoi contributi furono essenzialmente frutto di un suo particolare ed intenso percorso di studi come autodidatta unito alla notevole intelligenza.

⁶Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768 - Parigi 1830). Si occupò di matematica e di fisica la sua opera più famosa fu *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Lo sviluppo di questa teoria risale però al 1808, anno nel quale presentò lo strumento fondamentale di essa: la sviluppabilità in serie trigonometriche, strumento che nei decenni successivi si dimostrò fondamentale nel calcolo ma che all'inizio fu osteggiato. Successivamente F. introdusse un'altra importante relazione integrale: la trasformata di F.

⁷Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 con bordo $\partial\Omega$ sostegno di una superficie regolare, anche a tratti, ossia di classe C^1 , a tratti, con jacobiano di caratteristica 2. Il flusso di un campo vettoriale $\Phi \in C^1(\Omega)$ uscente dalla superficie $\partial\Omega$ è dato

$$\int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \nu dS.$$

Vale la formula (*teorema della divergenza*)

$$\int_{\Omega} div \Phi(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \nu dS.$$

Dividendo entrambi i membri per Δt e per il volume del dominio Ω , facendo tendere Δt a zero e Ω al punto x , otteniamo l'equazione del calore

$$u_{,t} = a^2 \Delta u,$$

dove $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

La meccanica dei fluidi.

Se \mathbf{v} è il vettore velocità di un moto fluido, il vettore $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}$ ⁽⁸⁾ è legato alla rotazione delle particelle fluide e ne rappresenta la velocità angolare \mathbf{w} .

Se $\text{rot} \mathbf{w} = \mathbf{0}$ il moto si chiama irrotazionale (non vorticoso); allora esiste un funzionale φ detto “potenziale della velocità”, di cui \mathbf{v} è il gradiente (se il dominio è semplicemente connesso) cioè $\mathbf{v} = \text{grad} \varphi$. Quindi l'equazione della “continuità” che fornisce $\text{div} \mathbf{v} = 0$, ci dà

$$\text{div} \text{grad} \varphi = 0,$$

ovvero

$$\Delta \varphi = 0.$$

Nella cinematica dei mezzi continui si deve tradurre in equazioni la condizione di “conservazione della materia” che deve essere soddisfatta nel moto di ogni mezzo continuo. Ovvero l'aumento nell'unità di tempo della massa contenuta in uno spazio dato deve essere sempre uguale alla massa che nello stesso tempo entra in esso. L'equazione “della continuità” (dal punto di vista euleriano) si esprime nella forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.2)$$

dove ad esempio ρ può essere la densità del fluido e \mathbf{v} la velocità della particella che attraversa l'elemento di superficie.

Il termine *divergenza* deriva dal fatto che nel caso di fluidi di densità unitaria $\text{div} v dx$ rappresenta la quantità di fluido uscente per unità di tempo dall'elemento di volume dx e quindi $\text{div} \mathbf{v}$ rappresenta la quantità di fluido che esce (diverge) dall'unità di volume nell'unità di tempo secondo l'equazione

$$\int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \nu) d\sigma = \int_{\Omega} \text{div}(\rho \mathbf{v}) dx, \quad (1.3)$$

essendo Ω un corpo di frontiera $\partial\Omega$, con ν normale esterna a $\partial\Omega$.

Inoltre, poiché $\text{div} \rho \mathbf{v} = \rho \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho$, se il fluido è incompressibile (e omogeneo), nell'equazione (1.2) la densità è costante e quindi l'equazione della continuità diventa

$$\text{div} \mathbf{v} = 0.$$

Si parla in questo caso di *campi vettoriali a divergenza nulla* che sono caratterizzati dal fatto che il flusso uscente da un qualunque porzione Ω di spazio finito sia nullo. Questo campi si chiamano *campi solenoidali* (dal greco $\sigma\omega\lambda\eta\nu =$ tubo). Infatti questi campi, considerando le linee di flusso uscenti dai punti di una

⁸Ovvero il vettore di componenti

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

dove $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)) = \mathbf{e}_1 v_1(x, y, z) + \mathbf{e}_2 v_2(x, y, z) + \mathbf{e}_3 v_3(x, y, z)$.

Osserviamo che $\text{rot} \mathbf{v}$ si può determinare formalmente calcolando il seguente determinante

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

linea chiusa, costituiscono una superficie tubolare detta *tubo di flusso*. Fissate due sezioni trasversali con le normali orientate in versi corrispondenti, se il campo è solenoidale, il flusso attraverso le sezioni è lo stesso flusso del vettore $\rho \mathbf{v}$ attraverso la superficie Σ ed è

$$\int_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma. \quad (1.4)$$

Dal punto di vista matematico dire che $\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ equivale a dire che il campo dei vettori \mathbf{v} verifica la *condizione delle derivate in croce* relativa alla forma differenziale $\omega = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$. Se il dominio è semplicemente connesso è noto che esiste una funzione φ tale che

$$(v_1, v_2, v_3) = \text{grad } \varphi.$$

Le membrane.

Le membrane sono elementi strutturali bidimensionali, si rappresentano infatti come superfici dello spazio in quanto si considera lo spessore piccolo rispetto alle altre due grandezze. Si possono schematizzare mediante il loro piano medio (in analogia con il fatto che per le travi e le corde si considera la linea dell'asse). Nelle membrane lo spessore trascurabile permette di non tener conto delle azioni taglianti, flettenti e torcenti, quindi gli sforzi normali trasmessi potranno essere solo di trazione.

Eseguito il bilancio delle forze agenti sulla struttura che danno una deformazione significativa si ottiene un'equazione non lineare. Per semplicità, un primo approccio suppone quindi che la deformazione di equilibrio sia molto prossima a quella iniziale, si considerano solo le componenti tangenziali delle forze e le traslazioni verticali w dei punti. Detti \mathbf{N} il vettore tensione e $p\mathbf{k}$ ⁽⁹⁾ la risultante del carico esterno, su una qualunque porzione interna l'equilibrio della traslazione verticale è dato da

$$\int_{\Omega} p \mathbf{k} dx dy = \oint_{\gamma} \mathbf{N} dL. \quad (1.5)$$

Supponendo che lo stato della sollecitazione interna sia uniforme, risulta $\mathbf{N} = N_0 \cdot (\nu_x \mathbf{t}_x + \nu_y \mathbf{t}_y)$ dove \mathbf{t}_x e \mathbf{t}_y sono vettori del piano tangente alla membrana di componenti $(1, 0, w_{,x})$ e $(0, 1, w_{,y})$ e (ν_x, ν_y) sono la loro proiezione sul piano (x, y) . Moltiplicando quindi (1.5) per il versore \mathbf{k} otteniamo l'equazione

$$\int_{\Omega} p dx dy = \oint_{\gamma} N_0 (\nu_x w_{,x} + \nu_y w_{,y}) dL = \oint_{\gamma} [(N_0 w)_{,x} \nu_x + (N_0 w)_{,y} \nu_y] dL =$$

$$\oint_{\gamma} ((N_0 w)_{,x}, (N_0 w)_{,y}) \cdot (\nu_x, \nu_y) dL = \oint_{\gamma} \nabla(N_0 w) \cdot (\nu_x, \nu_y) dL =$$

(Applichiamo il teorema della divergenza prendendo $\boldsymbol{\Phi} = \nabla(N_0 w)$)

$$= \int_{\Omega} \text{div} \nabla(N_0 w) dx dy = \int_{\Omega} N_0 \text{div} \nabla w dx dy = \int_{\Omega} N_0 \Delta w dx dy.$$

Da cui

$$\int_{\Omega} [p - N_0 \Delta w] dx dy = 0$$

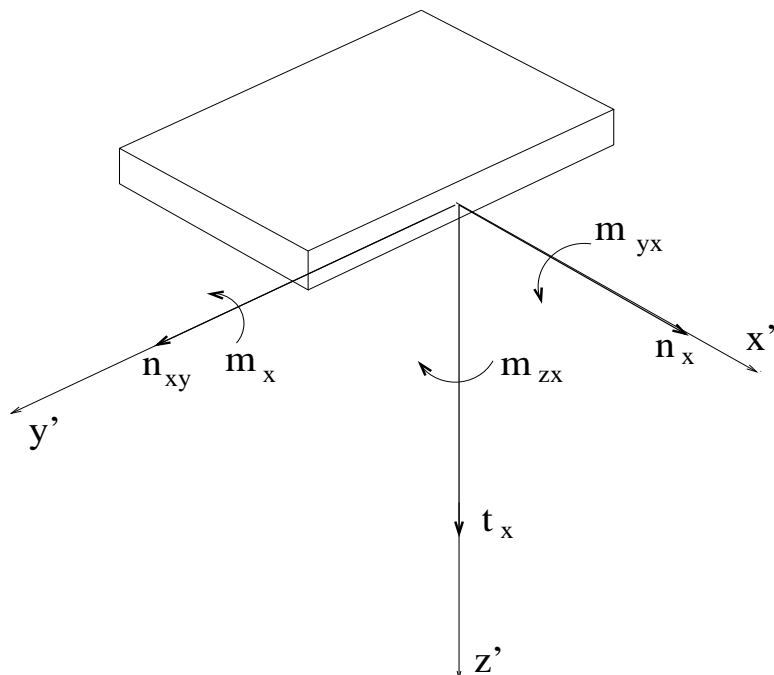
Quindi questo integrale risulta nullo per ogni porzione di superficie Ω considerata e dato che la funzione integranda si suppone almeno continua ($p \in C^0$ e $w \in C^2$) otteniamo⁽¹⁰⁾ che per ogni (x, y) del dominio vale

$$p(x, y) - N_0 \Delta w(x, y) = 0 \iff \Delta w(x, y) = \frac{p}{N_0}$$

⁹ $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

¹⁰Sia D un sottoinsieme misurabile di R^n ed $f \in C^0(D)$, se per ogni $\Omega \subset D$ risulta $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ allora $f = 0$ su D

Le piastre.(La piastra sottile inflessa).



Per questo tipo di strutture valgono le seguenti equazioni (vedi la figura per le notazioni):

Equilibrio.

$$\left\{ \begin{array}{l} t_x = m_{x,x} + m_{xy,y} \\ t_y = m_{y,y} + m_{xy,x} \\ t_{x,x} + t_{y,y} + p = 0 \end{array} \right. ,$$

da cui derivando e sommando

$$m_{x,xx} + m_{y,yy} + 2m_{xy,xy} = -p. \quad (1.6)$$

Congruenza

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_x = -w_{,xx} \\ \chi_y = -w_{,yy} \\ \chi_{xy} = -w_{,xy} \end{array} \right.$$

Legame costitutivo⁽¹¹⁾

¹¹ D è la rigidezza della piastra, ν è il modulo di Poisson che tiene conto del materiale. Ricordiamo che se h è lo spessore ed E è il modulo di elasticità, vale la formula $D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$.

$$\begin{cases} m_x = D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ m_y = D(\chi_y + \nu\chi_x) \\ m_{xy} = D(1 - \nu)\chi_{xy} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} m_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ m_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ m_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy} \end{cases} \quad (1.7)$$

Da (1.6), (1.7) segue

$$-D[w_{,xxxx} + w_{,yyyy} + 2\nu w_{,xxyy} + 2(1 - \nu)w_{,xyxy}] = -p$$

che possiamo scrivere

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D}.$$

L'equazione che otteniamo in questo caso è *un'equazione ellittica del quarto ordine*. A differenza delle equazioni ellittiche del secondo ordine (come quelle in cui compare il laplaciano visto in precedenza) per queste non vale il principio di massimo⁽¹²⁾.

Ad esempio la funzione $w(x, y) = -(x^2 + y^2)$ assume massimo nell'origine e risolve $\Delta\Delta w = 0$.

Tra le altre cose dimostreremo che una delle conseguenze del principio di massimo è quella di fornire informazioni sul segno della soluzione dell'equazione $\Delta w = f$ con $f \geq 0$. Si tratta di una questione che si pone anche per problemi riguardanti equazioni del quarto ordine del tipo⁽¹³⁾

$$\begin{cases} \Delta\Delta w = f, \text{ su } \Omega \\ w = 0, \text{ su } \partial\Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \text{ su } \partial\Omega, \end{cases}$$

la risposta in questo caso è: “dipende dal dominio”.

Le due questioni a cui abbiamo fatto riferimento sono due esempi dei molti problemi riguardanti le equazioni alle derivate parziali e che esamineremo nel prossimo paragrafo.

1.4 Una panoramica dei principali problemi riguardanti le equazioni differenziali.

Il problema più importante relativo alle equazioni differenziali è, ovviamente, quello dell'**esistenza di una soluzione**. Per risolvere questo ci sono due strade che si possono percorrere:

- (i) in modo “costruttivo”, ossia mediante una “formula risolutiva”, o anche “per tentativi” ovvero per “analogia”;
- (ii) mediante un teorema di esistenza.

¹²Come dimostreremo nel seguito le soluzioni di $\Delta w = 0$ assumono il massimo ed il minimo sulla frontiera del dominio.

¹³Se Ω è un dominio con $\partial\Omega$ indichiamo la sua frontiera, $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ è la derivata nella direzione della normale esterna.

Vediamo alcuni semplici esempi di (i).

Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che se $f \in C^0([a, b])$ allora l'equazione $u'(t) = f(t)$, $u(a) = u_0$ ammette una soluzione $u \in C^1([a, b])$ data da $u(t) = u_0 + \int_a^t f(s) ds$ (formula risolutiva).

Nel seguito vedremo alcune formule risolutive per le equazioni alle derivate parziali.

Per avere un'idea della ricerca di una soluzione “per tentativi” o per “analogia” ricordiamo le equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti del tipo $a_n u^n(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0$, dove, se a_n, \dots, a_1, a_0 sono costanti reali o complesse si cercano soluzioni del tipo $e^{\lambda t}$. Ricordiamo che i valori di λ vengono trovati considerando il polinomio caratteristico associato all'equazione $P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$ e risolvendo l'equazione algebrica $P(\lambda) = 0$.

Un esempio elementare di (ii) è il teorema di Cauchy ⁽¹⁴⁾ relativo a problemi del tipo $u'(t) = f(t, u(t))$, $t \in [a, b]$, $u(a) = u_0$. Questo asserisce che esiste una ed una sola soluzione $C^1([a, b])$ del problema se $f(t, u)$ è continua in t e uniformemente lipschitziana in u .⁽¹⁵⁾

Un altro esempio di problematiche importanti sono quelle riguardanti la regolarità delle soluzioni, che dette in parole povere: se i dati sono “buoni” sono “buone” anche le soluzioni? Ossia, se i dati sono regolari sono regolari anche le soluzioni?

Per capire l'importanza della questione facciamo, per semplicità, ancora riferimento alle equazioni differenziali ordinarie ricordando il seguente teorema.

Se $f, a_0, a_1, \dots, a_n \in C^\infty$ o sono analitiche⁽¹⁶⁾ allora la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} a_n(t)u^n(t) + a_{n-1}(t)u^{n-1}(t) + \dots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) & = & f(t) \\ u(t_0) & = & u_0 \\ u'(t_0) & = & u_1 \\ \dots & & \dots \quad \dots \\ \dots & & \dots \quad \dots \\ u^{n-1}(t_0) & = & u_{n-1} \end{cases} \quad (1.8)$$

è C^∞ o è analitica. Questo risultato fornisce le condizioni per poter scrivere in maniera esplicita, o perlomeno approssimare, la soluzione di (1.8). Ricordiamo infatti che il metodo del *polinomio caratteristico* citato sopra non si applica alle equazioni con coefficienti variabili.

Diamo alcuni esempi di come si utilizza questo risultato costruendo, per ricorrenza, la soluzione di un problema di Cauchy.

$$\begin{cases} u''(t) - t u(t) = 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

Sappiamo che questo ammette una ed una sola soluzione $u \in C^2(\mathbb{R})$. Dal teorema citato si deduce che la

soluzione u è analitica in un intorno $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, quindi u è sviluppabile in serie di potenze: $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$.

¹⁴Augustin-Louis Cauchy (Parigi 1789 - Sceaux, Seine 1857) fu uno dei più grandi matematici dell'ottocento. Laureato in ingegneria nel 1809, già nel 1813 si segnalò per le sue ricerche sui poliedri e sugli integrali doppi. A lui si deve l'introduzione del rigore e dello spirito critico nei fondamenti dell'analisi infinitesimale, coi che anche per questo aspetto può essere considerato come uno dei fondatori della analisi matematica moderna. Oltre ai numerosi contributi nei vari campi della matematica (le sue opere occupano ventisette volumi, quasi ottocento scritti e sette volumi di lezioni ed esercizi), ricordiamo i suoi contributi alla meccanica dei sistemi continui, in particolare il *teorema del tetraedro* sul modo in cui si distribuiscono gli sforzi nell'intorno di un punto di un sistema, e le equazioni fondamentali di questa teoria, in particolare quella della teoria dell'elasticità.

¹⁵Ovvero, esiste $M > 0$ tale che, per ogni $(t_1, u_2), (t_2, u_2)$ risulta $|f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2)| \leq M |u_1 - u_2|$.

¹⁶Se I è un intervallo di \mathbb{R} , una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice analitica se per ogni punto $t_0 \in I$ esiste un intorno $U(t_0)$ ed una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ convergente assolutamente in ogni punto di $U(t_0)$ tali che $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$.

Teorema. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aperto, $u_0 \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ analitica in un intorno del punto $(t_0, u_0) \in \Omega$, allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione u , analitica in un intorno del punto t_0 .

Conosceremo esattamente il valore di $u(t)$ non appena conosceremo i coefficienti $\{c_k\}_{n \in \mathbb{N}}$. Procedendo in maniera formale:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}, \\ u''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2}, \\ t u(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}. \end{aligned}$$

Sostituiamo in (1.9)

$$\begin{aligned} u''(t) - t u(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} - \sum_{h=3}^{\infty} c_{h-3} t^{h-2} = \\ &= 2c_2 + \sum_{k=3}^{\infty} [k(k-1) c_k - c_{k-3}] t^{k-2} = 0. \end{aligned}$$

Da questa, osservando che una serie è nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, otteniamo la seguente relazione che definisce la successione $\{c_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ per ricorrenza:

$$\begin{cases} c_0 = a \\ c_1 = b \\ c_2 = 0 \\ k(k-1)c_k - c_{k-3} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Quindi

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} c_0, \quad c_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} c_1, \quad c_5 = \frac{1}{4 \cdot 5} c_2 = 0, \quad \dots$$

In generale:

$$c_{3m+2} = 0, \quad c_{3m} = \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3m-2)}{(3m)!} c_0, \quad c_{3m+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3m-1)}{(3m+1)!} c_1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

La soluzione dell'equazione è quindi

$$u(t) = a \left[1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3m-2)}{(3m)!} t^{3m} \right] + b \left[1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3m-1)}{(3m+1)!} t^{3m+1} \right].$$

Si vede facilmente che il raggio di convergenza di questa serie è $+\infty$ (criterio del rapporto), ed inoltre le due serie sono linearmente indipendenti⁽¹⁷⁾, sono perciò una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea.

Esercizio. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) = 2(1+2t^2)u(t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Risposta: $u(t) = e^{t^2}$.

In generale per le equazioni alle derivate parziali vale il seguente risultato.

¹⁷Se $f(t) = \sum_{m=p}^{+\infty} a_m t^m$ e $\sum_{m=q}^{+\infty} b_m t^m$ con $p < q$, $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$, allora le due serie sono linearmente indipendenti.

Teorema 1.4.1 (Teorema di Cauchy-Kovalevskaja⁽¹⁸⁾) Dato il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^h u(t, x)}{\partial t^h} = f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^h u}{\partial x_1^h}, \dots, \frac{\partial^h u}{\partial x_n^h}\right), \\ \frac{\partial^{h-1} u(0, x)}{\partial t^{h-1}} = \varphi_{h-1}(x) \\ \dots \\ u(0, x) = \varphi_0(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

($x = (x_1, \dots, x_n)$)

Se $\varphi_{h-1}, \dots, \varphi_0$ sono analitiche in un intorno di $x = 0$ e f è analitica in un intorno di $(0, 0, \dots, 0)$ allora u è analitica in un intorno di $(0, 0, \dots, 0)$.

1.5 Condizioni iniziali e condizioni al bordo

Generalmente un modello matematico creato per riflettere le proprietà di un fenomeno fisico ha luogo in qualche regione limitata dello spazio. In tale situazione la connessione con processi che si svolgono fuori della parte considerata non possono essere interamente ignorati e di essi si deve tener conto nella costruzione del modello matematico. Il fenomeno studiato imporrà ai parametri di assumere determinati comportamenti agli estremi del dominio e quindi questi dovranno assumere valori assegnati che chiameremo, a secondo dei casi, *condizioni al bordo o condizioni iniziali*.

Ad esempio possiamo considerare una trave di lunghezza l ed associamo un sistema di coordinate, in questo caso basta l'asse delle ascisse, (vedi figura) in modo che, nella condizione di equilibrio, il primo estremo abbia ascissa 0 ed il secondo l . Le condizioni al bordo nell'estremo sinistro $x = 0$ possono, per esempio, avere la seguente forma

- a) $u(0) = 0$ (estremo fisso);
- b) $u_{,x}(0) = 0$ (estremo mobile);
- c) $ESu_{,x}(0) - ku(0) = 0$ (punto fissato in modo elastico mediante una molla con costante di elasticità k che è in equilibrio quando il suo estremo destro, che è fissato rigidamente all'estremo sinistro della trave, sta nel punto $x = 0$).

Simili condizioni si possono scrivere per gli estremi destri.

Per l'equazione del calore che descrive una sostanza che occupa una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si possono considerare come condizioni al bordo una delle seguenti relazioni:

- a) $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ (il bordo è mantenuto ad una data temperatura φ);
- b) $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\partial\Omega} = \varphi$ (flusso di calore assegnato attraverso il bordo);
- c) $\left[\frac{\partial u}{\partial n} - \gamma(u_0 - u)\right]|_{\partial\Omega} = 0$ (scambio di calore con l'ambiente alla temperatura u_0 che avviene al bordo).

Nello studio di processi che dipendono dal tempo, l'evolversi del processo è studiato a partire da un certo istante iniziale. In questo caso la preistoria del processo, che è parzialmente riflesso nella forma delle relazioni

¹⁸Sof'ja Vasil'evna Kovalevskaja (Mosca 1850 - Stoccolma 1891) Fu allieva di Weierstrass e insegnò all'università di Stoccolma. Oltre al citato teorema, recò notevoli contributi a problemi dinamici relativi agli anelli di Saturno.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, (Osterfeld, Münster 1815 - Berlino 1897). Fu uno dei maggiori matematici dell'ottocento. Si interessò di argomenti riguardanti vari campi della matematica portando importanti contributi: funzioni analitiche, analisi infinitesimale, teoria delle funzioni, calcolo delle variazioni ecc.

tra i valori del parametro in questione e le loro derivate all'istante iniziale, è essenziale. Queste relazioni sono chiamate *condizioni iniziali*.

Per esempio, le condizioni iniziali naturali per l'equazione delle onde unidimensionale sono ottenute assegnando la posizione e la velocità di tutti i punti della trave

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$$

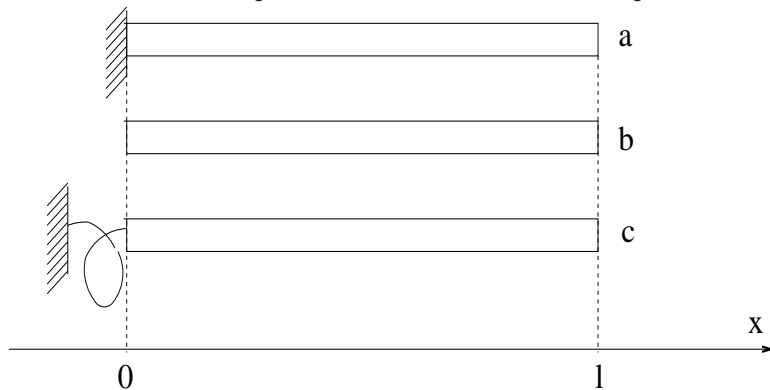
(se la trave ha lunghezza l ed è situata come indicato sopra, allora è necessario supporre che $x \in [0, l]$). Per l'equazione del calore è naturale assegnare la distribuzione di temperatura iniziale.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x),$$

dove $x \in \Omega$ nel caso che il mezzo studiato occupi la regione Ω .

Notiamo infine che poiché talvolta i processi fisici portano a relazioni non lineari tra i parametri, questo porta necessariamente a studiare equazioni differenziali non lineari ed eventualmente condizioni al bordo non lineari. Quando ciò accade di regola sorgono pesanti problemi di carattere matematico. Quindi, di solito è necessario sacrificare la precisione della costruzione del modello matematico e trascurare gli incrementi non lineari che si ritengono "piccoli" o passare ad una linearizzazione nell'intorno di una data soluzione, riconducendosi ad un problema lineare.

Ovviamente una linearizzazione di un problema non sufficientemente ponderata può allontanarsi troppo dal fenomeno studiato e portare dei risultati dall'esito imprevisto o addirittura catastrofico.⁽¹⁹⁾



1.6 Il concetto di problema ben posto nel senso di Hadamard

Consideriamo ora l'importante concetto di **problema ben posto** per i problemi relativi alle equazioni differenziali con condizioni al bordo o con condizioni iniziali.

Questo concetto fu introdotto da Hadamard⁽²⁰⁾. Per comprendere bene questo concetto possiamo fare alcuni semplici esempi relativi alle equazioni differenziali ordinarie, considerando i seguenti problemi

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 3 \tag{1.12}$$

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0, \quad u(0) = 2 \tag{1.13}$$

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 3, \quad u''(0) = 4 \tag{1.14}$$

¹⁹Si veda ad esempio il noto caso del ponte di Tacoma [15]

²⁰Jacques Hadamard (Versailles 1865 - Parigi 1963) Fu uno dei più insigni matematici francesi del secolo scorso. Dette importanti contributi nel campo delle funzioni analitiche, nella frequenza dei numeri primi e sulle equazioni differenziali della fisica matematica.

È evidente che il problema (1.12) ammette una ed una sola soluzione $u(t) = e^t + e^{2t}$. Il problema (1.13) ne ha infinite del tipo $ce^t + (2-c)e^{2t}$, $c \in \mathbb{R}$, quindi il numero delle condizioni iniziali è insufficiente. Infine (1.14) non ha soluzioni perchè le condizioni iniziali sono troppe.

Il modello matematico può essere considerato soddisfacente solo nel caso in cui per qualche insieme di dati del problema, ovvero di funzioni assegnate come condizioni al bordo o condizioni iniziali, si ha che la soluzione esiste ed è unica. Comunque questo non è ancora sufficiente. In ogni problema con dati al bordo o con condizioni iniziali connesso con un reale fenomeno fisico i dati del problema sono trovati mediante misurazioni, che non possono essere perfette e spesso presentano degli errori.

Il problema può essere considerato ben posto solo nel caso che una piccola variazione dei dati del problema porta ad una piccola variazione della soluzione.

Questo non è detto che capiti sempre, anche se il problema ammette esistenza ed unicità di soluzione, come si vede dal seguente esempio. ⁽²¹⁾

Esempio di Hadamard.

Nel piano \mathbb{R}^2 delle variabili (t, x) consideriamo l'equazione di Laplace nella regione $t > 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con le condizioni iniziali

$$u(0, x) = \psi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} u(0, x) = \varphi(x) \quad (1.15)$$

Si dimostra che la soluzione u di questo problema (per esempio di classe C^2 per $t \geq 0$) è unica.

La successione di funzioni

$$u_n(t, x) = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \sin nx$$

soddisfa l'equazione di Laplace con le condizioni iniziali (1.15)

$$\varphi = \varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} n \sin nx, \quad \psi = \psi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx$$

È chiaro che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$

$$\sup_x |\varphi_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \sup_x |\psi_n(x)| \leq \varepsilon.$$

D'altra parte si vede facilmente che per ogni $t_0 > 0$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_x |u_n(t_0, x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{nt_0 - \sqrt{n}} = +\infty.$$

Questo esempio mostra come sia importante tener conto della struttura dell'equazione quando si pongono delle condizioni al bordo.

Comunque nella definizione di problema ben posto un ruolo importante gioca la scelta degli spazi in cui si cerca la soluzione.

Riassumiamo la **definizione di problema ben posto** più comune.

Siano U, V e W spazi vettoriali topologici⁽²²⁾, con $U \subset V$. Indichiamo con u la soluzione di un dato problema e con f il dato (u e f possono essere anche funzioni a valori vettoriali, perchè il dato comprende sia il secondo membro di un'equazione sia i dati al bordo). Il problema si dice *ben posto* se

- (1) Per ogni dato f esiste una soluzione u del problema.
- (2) La soluzione è unica.
- (3) La soluzione u come elemento dello spazio V dipende con continuità da $f \in W$.⁽²³⁾

²¹In talune applicazioni capita comunque di trovare dei problemi che non sono ben posti nel senso visto sopra.

²²Ovvero spazi vettoriali sui quali sia stata definita una topologia compatibile con le operazioni dello spazio, ossia tale che le operazioni $U \times U \rightarrow U$ definita da $(u_1, u_2) \rightarrow u_1 + u_2$ e $\mathbb{R} \times U \rightarrow U$ definita da $(\alpha, u) \rightarrow \alpha u$ siano continue.

²³Ovvero la funzione $F : W \rightarrow V$ che associa ad ogni dato la soluzione del problema è continua. Nel caso di spazi topologici questo significa che per ogni aperto A di V risulta $F^{-1}(A)$ è aperto in W . Ricordiamo che A sottoinsieme di uno spazio topologico è aperto se ogni suo punto ammette un intorno contenuto in A . Di conseguenza se due punti sono vicini allora i punti dell'immagine sono vicini.

1.7 I limiti di applicabilità dei modelli matematici.

Naturalmente la descrizione matematica dei fenomeni reali che usa le equazioni differenziali, come tutti i modelli matematici, è un'astrazione. Per esempio la legge di Hooke, applicata nel caso della trave visto in precedenza, è un'idealizzazione, come successivamente la legge di Fourier sulla trasmissione del calore può essere resa più precisa tenendo conto della struttura molecolare della sostanza. Di conseguenza le deduzioni ottenute usando lo studio, e quindi le soluzioni esatte, delle equazioni differenziali, sono anch'esse approssimate, ad esempio l'equazione del calore prevede una velocità infinita di propagazione del calore (anche da una sorgente puntuale), che ovviamente è assurdo. Nello stesso tempo, questo effetto ha un'influenza molto scarsa sul calcolo della trasmissione del calore in ingegneria, dove la teoria matematica della trasmissione del calore è comunemente usata con successo. La situazione è la stessa per ogni altro modello, in particolare per i modelli basati sulle equazioni differenziali. Può capitare che **deduzioni ottenute considerando un modello matematico differiscano in maniera significativa dai risultati di un esperimento. Tale discordanza indica che il modello matematico è incompleto e per questo deve essere rimpiazzato con un modello basato su altre leggi che tengano conto in maniera più precisa delle caratteristiche dell'oggetto che stiamo studiando.**

Ulteriori ipotesi sulla regolarità delle funzioni, che descrivono il comportamento dei parametri fondamentali, sono di solito introdotte nella deduzione delle equazioni differenziali al fine di semplificare le espressioni matematiche delle leggi riguardanti i fenomeni studiati. Queste ipotesi comunque non sono sempre giustificate o appropriate. Nella moderna teoria delle equazioni differenziali questa difficoltà ha portato alla creazione del concetto di soluzione generalizzata, che riflette il passaggio da equazioni integro differenziali a equazioni differenziali che spesso sorgono prima nel processo di costruzione del modello oggetto di studio.

1.8 Generalità sulle equazioni alle derivate parziali

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione che compare con le sue derivate.

Le equazioni differenziali si possono classificare nel modo seguente:

equazioni differenziali ordinarie: se l'incognita è una funzione di una sola variabile;

equazioni differenziali alle derivate parziali: se l'incognita è una funzione di due o più variabili.

Un'ulteriore suddivisione di ciascuna di queste due classi può essere fatta distinguendo le *equazioni lineari* da quelle *non lineari*:

un'equazione si dice **lineare** se la dipendenza dall'incognita e dalle sue derivate è di tipo lineare.

Esempio 1.8.1

L'equazione:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

è lineare, mentre non è lineare:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

Definizione 1.8.1 (Ordine di un'equazione)

Un'equazione differenziale si dice di ordine $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se contiene almeno una derivata di ordine m e non contiene derivate di ordine superiore.

Esempio 1.8.2

L'equazione:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

è del secondo ordine, mentre quelle dell'Esempio 1.8.1 sono del primo.

Un'equazione alle derivate parziali **lineare** del secondo ordine che si presenta nell'incognita u , funzione delle variabili x_1, \dots, x_n , si può ricondurre alla forma seguente

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1.16)$$

dove la variabile $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartiene a tutto \mathbb{R}^n o ad un suo sottoinsieme aperto Ω ⁽²⁴⁾, mentre le funzioni a_{ij} , b_i , c , f sono definite in \mathbb{R}^n , o in Ω , a valori in \mathbb{R} (o anche in \mathbb{C}). a_{ij} , b_i , c si chiamano coefficienti dell'equazione, mentre f si chiama termine noto. Se $f \equiv 0$ su Ω l'equazione si dice *omogenea*, altrimenti si dice *non omogenea*.

Definizione 1.8.2 (*Soluzione classica*)

Siano Ω aperto di \mathbb{R}^n e a_{ij} , b_i , c , f funzioni di classe $C^0(\Omega)$ (ossia continue su Ω). La funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se i coefficienti ed il termine noto appartengono a \mathbb{C}) si dice **soluzione classica** dell'equazione (1.16) se $u \in C^2(\Omega)$ (ossia ha le derivate seconde continue su Ω) e verifica (1.16) per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$.

Esempio 1.8.3

La funzione

$$u(x, y) = (x^2 - y^2) \sqrt{[-\log(\sqrt{x^2 + y^2})]}$$

risolve l'equazione

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y),$$

su

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r < 1\} \setminus \{(0, 0)\},$$

$0 < r < 1$, fissato, dove

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)} \left[\frac{4}{\sqrt{-\log \sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{1}{2\sqrt{-[\log \sqrt{x^2 + y^2}]^3}} \right] & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si verifica che $f \in C^0(\bar{\Omega})$ mentre $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{(0, 0)\})$.

La funzione u non può essere una soluzione classica su $\bar{\Omega}$ perché

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[2\sqrt{-\log \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{-\log \sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{-\log \sqrt{x^2 + y^2}}} - \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2) \sqrt{-\log \sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{x^2(x^2 - y^2)}{4(x^2 + y^2)^2 \sqrt{-[\log \sqrt{x^2 + y^2}]^3}} \right] = +\infty.$$

Si osservi che u sulla parte di frontiera di Ω definita da $x^2 + y^2 = r$ verifica

$$u(x, y) = \sqrt{-\log r} (2x^2 - r^2), \quad -r \leq x \leq r.$$

È possibile dare una classificazione ulteriore delle equazioni del tipo (1.16) considerando i coefficienti a_{ij} delle derivate seconde. A tale scopo premettiamo la seguente osservazione.

²⁴Un sottoinsieme Ω di \mathbb{R}^n si dice *aperto* se per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ esiste una palla $S(\mathbf{x}, r)$ di centro \mathbf{x} e raggio $r > 0$ contenuta in Ω .

Osservazione 1.8.1

Poniamo

$$a_{ij}^+ = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad a_{ij}^- = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.17)$$

Tenuto conto di questo, nel caso che u sia soluzione classica, l'equazione (1.16) equivale alla seguente⁽²⁵⁾:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^+(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (1.18)$$

Infatti, essendo $u \in C^2(\Omega)$, per il teorema di Schwarz⁽²⁶⁾ di inversione dell'ordine di derivazione, si ha

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^-(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - a_{ji}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \quad (1.19)$$

$$(1.20)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^n a_{ji}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0. \quad (1.21)$$

Da queste considerazioni deduciamo che, nel caso di soluzioni classiche, possiamo supporre che la matrice $A(\mathbf{x}) = \{a_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1,\dots,n}$ sia **simmetrica**, ossia

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Quindi, fissato $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, siano $\lambda_1(\mathbf{x}_0), \dots, \lambda_n(\mathbf{x}_0)$ gli n autovalori reali della matrice $A(\mathbf{x}_0)$ ⁽²⁷⁾.

Indichiamo con

$n_+ = n_+(\mathbf{x}_0)$ il numero degli autovalori positivi,

$n_- = n_-(\mathbf{x}_0)$ il numero degli autovalori negativi,

$n_0 = n_0(\mathbf{x}_0)$ il numero degli autovalori nulli,

ovviamente $n = n_+ + n_- + n_0$.

Definizione 1.8.3 *L'equazione (1.16) si dice di tipo **ellittico** (oppure **ellittica**) in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se $n_+ = n$ oppure $n_- = n$. L'equazione (1.16) si dice di tipo **ellittico** (oppure **ellittica**) in Ω se è ellittica in ogni $\mathbf{x} \in \Omega$.*

In particolare, poiché gli autovalori di $A(\mathbf{x}_0)$ sono tutti positivi (o negativi), la forma quadratica associata alla matrice risulta definita positiva (o negativa) in \mathbf{x}_0 , cioè esiste $\nu(\mathbf{x}_0) > 0$ tale che per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ risulta⁽²⁸⁾

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}_0) \xi_i \xi_j \geq \nu(\mathbf{x}_0) \|\xi\|_n^2, \quad (\text{oppure } \leq -\nu(\mathbf{x}_0) \|\xi\|_n^2). \quad (1.22)$$

²⁵Nel senso che u è soluzione di (1.16) se e solo se è soluzione di (1.18)

²⁶Karl Hermann Amandus Schwarz (Hemsdorf, Slesia 1843 - Berlino 1921). Insegno nelle università di Halle, Gottinga, Zurigo e Berlino. si occupò della teoria delle superfici minime e delle funzioni armoniche.

²⁷Una matrice $n \times n$ reale e simmetrica ammette n autovalori reali, ossia l'equazione

$$\det [A(\mathbf{x}_0) - \lambda(\mathbf{x}_0) I] = 0 \quad (\text{dove } I \text{ è la matrice identità})$$

ammette n soluzioni reali $\lambda(\mathbf{x}_0)$.

²⁸Indichiamo con $\|\xi\|_n$ la norma del vettore $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ in \mathbb{R}^n , ossia $\|\xi\|_n = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$.

Nel caso in cui che esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \nu \|\xi\|_n^2, \quad (\text{oppure } \leq -\nu \|\xi\|_n^2), \quad (1.23)$$

diremo che l'equazione è ellittica in Ω .

Esempio 1.8.4

L'equazione di *Poisson*⁽²⁹⁾ $\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ è ellittica, perché essendo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

la sua forma quadratica associata è

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i^2 = \|\xi\|_n^2,$$

quindi $\nu = 1$.

Definizione 1.8.4 L'equazione (1.16) si dice di tipo **iperbolico** (o **iperbolica**) in \mathbf{x}_0 se $n_+ = n - 1$ e $n_- = 1$ (oppure se $n_+ = 1$ e $n_- = n - 1$).

L'equazione (1.16) si dice di tipo **iperbolico** (o **iperbolica**) in Ω se è iperbolica in ogni $\mathbf{x} \in \Omega$.

Esempio 1.8.5

L'equazione delle onde

$$\square u = \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f$$

è iperbolica. Infatti la forma quadratica associata è

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 - \xi_n^2.$$

Quindi la matrice A ha sulla diagonale $n - 1$ autovalori uguali a 1 ed un autovalore uguale a -1 .

Definizione 1.8.5 L'equazione (1.16) si dice di tipo **debolmente ellittica** (o **ellittica degenera**) in \mathbf{x}_0 se $n_0 > 0$ e $n_+ + n_0 = n$ (oppure $n_- + n_0 = n$).

L'equazione (1.16) si dice di tipo **debolmente iperbolica** (o **iperbolica degenera**) in \mathbf{x}_0 se $n_0 > 0$ $n_+ + n_0 = n - 1$ e $n_- = 1$ (oppure $n_- + n_0 = n - 1$ e $n_+ = 1$).

Ovviamente il tipo di equazione non è detto che sia costante in tutto Ω come si vede dall'esempio seguente.

Esempio 1.8.6

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Questa equazione risulta ellittica se $x > 0$, iperbolica se $x < 0$, degenera se $x = 0$.

Consideriamo ora l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} + a_{n+1}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (1.24)$$

dove a_{ij} , a_{n+1} , b_i , c , f sono funzioni definite su $\Omega \times (\alpha, \beta)$ a valori in \mathbb{R} , $i, j = 1, \dots, n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mentre $a_{ij} = a_{ji}$, con $i, j = 1, \dots, n$.

²⁹Siméon Denis Poisson (Pithiviers, Loiret 1781 - Parigi 1840) fu professore di matematica e di fisica all'École polytechnique ed alla Sorbona. Le sue ricerche riguardarono i più svariati campi della fisica matematica.

Definizione 1.8.6 L'equazione (1.24) si dice di tipo **parabolico** (oppure **parabolica**) in $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times (\alpha, \beta)$ se $n_+ = n$ e $a_{n+1}(\mathbf{x}_0, t_0) < 0$ (o se $n_- = n$ e $a_{n+1}(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$), dove n_+ e n_- rappresentano rispettivamente il numero degli autovalori negativi e positivi della matrice $A(\mathbf{x}_0, t_0) = \{a_{ij}(\mathbf{x}_0, t_0)\}_{i,j=1,\dots,n}$.

L'equazione (1.24) si dice di tipo **parabolico** (oppure **parabolica**) in $\Omega \times (\alpha, \beta)$ se è parabolica in ogni punto di $\Omega \times (\alpha, \beta)$.

Esempio 1.8.7

L'equazione del calore

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}, t),$$

è parabolica in \mathbb{R}^{n+1} .

Le classificazioni delle equazioni viste sopra sono invarianti rispetto a trasformazioni isomorfe del dominio Ω . Più precisamente fissati $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\psi : U(\mathbf{x}_0) \rightarrow V(\mathbf{y}_0)$, un'applicazione di un intorno $U(\mathbf{x}_0)$ ⁽³⁰⁾ del punto \mathbf{x}_0 in un intorno $V(\mathbf{y}_0)$ del punto \mathbf{y}_0 di classe $C^2(U(\mathbf{x}_0))$ tale che⁽³¹⁾

$$\det Jac \psi(\mathbf{x}_0) \neq 0, \tag{1.25}$$

allora vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.8.1 Le classificazioni delle equazioni del tipo (1.16) e (1.24) sono invarianti rispetto alle trasformazioni ψ che verificano (1.25).

Per ogni $\mathbf{y} \in V(\mathbf{y}_0)$ poniamo

$$v(\mathbf{y}) = u(\psi^{-1}(\mathbf{y})), \text{ quindi } u(\mathbf{x}) = v(\psi(\mathbf{x})),$$

ed inoltre

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial y_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,s=1}^n \frac{\partial^2 v(\mathbf{y})}{\partial y_k \partial y_s} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial y_s} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Quindi l'equazione (1.16) assume la forma:

$$\sum_{k,s=1}^n \tilde{a}_{ks}(\mathbf{y}) D_{ks} v(\mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, v, Dv), \text{ dove } Dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right), \tag{1.26}$$

con

$$\tilde{a}_{ks}(\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\psi^{-1}(\mathbf{y})) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \Big|_{x=\psi^{-1}(\mathbf{y})} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_i} \Big|_{x=\psi^{-1}(\mathbf{y})}$$

Ovvero

$$\tilde{A}(\mathbf{x}_0) = J A(\mathbf{x}_0)^t J,$$

dove

$$\tilde{A}(\mathbf{x}_0) = \{\tilde{a}_{ks}(\mathbf{x}_0)\}_{k,s=1,\dots,n}, \quad J = Jac \psi(\mathbf{x}_0), \text{ con } \det J \neq 0,$$

³⁰Un sottoinsieme $U(\mathbf{x}_0)$ di \mathbb{R}^n è intorno del punto \mathbf{x}_0 se contiene una palla $S(\mathbf{x}_0, r)$ di centro \mathbf{x}_0 e raggio r .

³¹La matrice jacobiana della funzione $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ è definita come la matrice delle derivate prime, ossia

$$Jac \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

L'aggettivo "jacobiana" deriva da Jacobi.

Karl Gustav Jacob Jacobi (Postdam 1805 - Berlino 1851). È considerato tra i maggiori matematici dell'ottocento ed è stato tra i fondatori dei moderni indirizzi della matematica. Le sue opere sono raccolte in otto volumi.

mentre tJ è la matrice trasposta di J . Si vede facilmente che il numero degli autovalori positivi, negativi o nulli di $\tilde{A}(\mathbf{x}_0)$ coincide con il numero di autovalori positivi, negativi o nulli di $A(\mathbf{x}_0)$.⁽³²⁾

È noto che, fissato $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, esiste una unica matrice $T(\mathbf{x}_0)$ con $\det T(\mathbf{x}_0) \neq 0$ tale che

$$T(\mathbf{x}_0) A(\mathbf{x}_0) {}^tT(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Se ad esempio $A(\mathbf{x}_0)$ è ridotta a forma diagonale, prendo T del tipo:

$$T(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^+(\mathbf{x}_0)}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^+(\mathbf{x}_0)}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n^+}^+(\mathbf{x}_0)}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1^-(\mathbf{x}_0)|}} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{n^-}^-(\mathbf{x}_0)|}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso λ_i^+ e λ_i^- sono gli elementi della diagonale principale di $A(\mathbf{x}_0)$.

La matrice $T(\mathbf{x}_0)$ individua un'applicazione lineare $T_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$, che manda Ω in $\tilde{\Omega} = T(\mathbf{x}_0)(\Omega)$, che è una bigezione tra Ω e $\tilde{\Omega}$ perché $\det T(\mathbf{x}_0) \neq 0$, in particolare $Jac T_{\mathbf{x}_0} = T(\mathbf{x}_0)$. Quindi l'equazione (1.16) viene trasformata in un'equazione del tipo (1.26) avente la forma:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial y_{n^+}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y_{n^++1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial y_{n^++n^-}^2} = F_2(\mathbf{y}, v, Dv), \quad (1.27)$$

dove F_2 non dipende dalle derivate seconde di v . L'equazione (1.27) si chiama **forma canonica** dell'equazione (1.24) nel punto \mathbf{x}_0 .

Abbiamo quindi dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 1.8.2 *Per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ esiste una trasformazione lineare $T(\mathbf{x}_0)$ con $\det T(\mathbf{x}_0) \neq 0$ tale che l'equazione (1.24) viene trasformata nella sua forma canonica.*

Se i coefficienti a_{ij} di (1.24) sono costanti in Ω , la trasformazione T è la stessa per tutti i punti di Ω .

1.9 Breve cenno alle equazioni di ordine superiore ed ai sistemi

Nel caso di **operatori di ordine superiore** possiamo dare la definizione di operatore ellittico come segue.⁽³³⁾

³²Infatti

$$(\tilde{A}v, v) = (JA^t Jv, v) = (A^t Jv, {}^t Jv) = \lambda \|{}^t Jv\|^2,$$

dove (\cdot, \cdot) è il prodotto scalare in \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma, λ un autovalore di A .

³³Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, poniamo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Se $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ poniamo $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$ e $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} u$.

Siano Ω aperto di \mathbb{R}^n , $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $A(x, D)u = \sum_{\alpha \leq l} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$ un operatore di ordine l . A si dice *ellittico* in $x_0 \in \Omega$ se per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq 0$ risulta

$$A_0(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha(x_0) \xi^\alpha \neq 0$$

$A_0(x, D)$, ovvero la parte che contiene le derivate di ordine massimo, si chiama **parte principale** dell'operatore $A(x, D)$. Si dimostra che se i *coefficienti* a_α sono *reali* allora l'operatore è di *ordine pari*. Se inoltre i coefficienti della parte principale dell'operatore sono di classe $C^1(\Omega)$ possiamo esprimere $A_0(Du)$ nella forma seguente

$$A_0(D)u = \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)$$

L'ordine dell'operatore è, ovviamente, $2m = l$.

Diremo che A è **uniformemente ellittico** su Ω se esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\nu \|\xi\|^{2m} \leq \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = A_0(\xi).$$

Si noti l'analogia con il caso degli operatori del secondo ordine.

Esempio. Il bilaplaciano è uniformemente ellittico.

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2}. \end{aligned}$$

Da cui

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 + 2\xi_1^2 \xi_2^2 + 2\xi_1^2 \xi_3^2 + 2\xi_2^2 \xi_3^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2 = \|\xi\|^4$$

Possiamo definire anche nel caso di ordine superiore gli operatori parabolici e iperbolici stabilendo un'analogia con quanto visto per il secondo ordine.

Diremo **parabolico** un operatore del tipo

$$A(x, t, D)u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D^\beta u(x, t)) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

ed **iperbolico** un operatore del tipo

$$A(x, t, D)u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D^\beta u(x, t)) + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Esempio. Nel caso del bilaplaciano avremo le seguenti equazioni, rispettivamente *parabolica* e *iperbolica*

$$\Delta \Delta u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f(x, t), \quad \Delta \Delta u(x, t) + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t).$$

Consideriamo il sistema

$$-\sum_{h=1}^N \sum_{i,j=1}^n D_j (A_{ij}^{hk}(x) D_i u_h(x)) = f_k(x), \quad k = 1, \dots, N,$$

dove u è una funzione a valori vettoriali $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Nel caso $N > 1$ si possono dare due differenti definizioni di ellitticità.

Definizione 1.9.1 (Ellitticità fortissima o Condizione di Legendre)⁽³⁴⁾

Diremo che A è **fortemente ellittico** o *soddisfa la Condizione di Legendre* su Ω se esiste una costante λ positiva tale che $\forall \tau \in \mathbb{R}^{nN}$, $\forall x \in \Omega$

$$\lambda \sum_{i=1}^n \|\tau^i\|_N^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \sum_{h,k=1}^N A_{ij}^{hk}(x) \tau_i^h \tau_j^k. \quad (1.28)$$

Definizione 1.9.2 (Ellitticità forte o Condizione di Legendre-Hadamard)

Diremo che A è **ellittico** o *soddisfa la Condizione di Legendre-Hadamard* su Ω se esiste una costante λ positiva tale che $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$, $\forall x \in \Omega$

$$\lambda \|\xi\|_n^2 \|\eta\|_N^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \sum_{h,k=1}^N A_{ij}^{hk}(x) \xi_i \xi_j \eta_h \eta_k. \quad (1.29)$$

Se $N = 1$ le tre definizioni coincidono.

Se $N > 1$ e l'operatore soddisfa la *Condizione di Legendre* allora soddisfa anche la *Condizione di Legendre-Hadamard*. Infatti basta porre in (1.28): $\tau_i^h = \xi_i \eta_h$. Il viceversa è in generale falso come vedremo negli esempi che esporremo più avanti.

Le matrici A^{hk} , con $h \neq k$ possono anche non essere ellittiche anche se A è ellittico come si vede dal seguente esempio.

Esempio. Sia $n = N = 2$. Gli operatori

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \Delta & \varepsilon D_1^2 \\ \varepsilon D_2^2 & \Delta \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon| < 2, \quad A = \begin{pmatrix} \Delta & \alpha(D_1^2 - D_2^2) \\ \alpha(D_1^2 - D_2^2) & \Delta \end{pmatrix}, \quad |\alpha| < 1,$$

sono fortemente ellittici in tutti e tre i casi, eppure A^{12} e A^{21} non sono ellittici.

L'esempio che segue permette di dimostrare che la *Condizione di Legendre-Hadamard* è quindi più debole della *Condizione di Legendre*.

Esempio 1.9.1 (Operatore dell'elasticità lineare)

Consideriamo il seguente operatore ($n = 3$, $N = 3$)

$$a \Delta \mathbf{u} + (a + 2b) \text{grad div } \mathbf{u} = \left(\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^{k1} D_{ij} u_k, \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^{k2} D_{ij} u_k, \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^{k3} D_{ij} u_k \right),$$

con $a > 0$, $b > 0$, dove, per $h, k, i = 1, 2, 3$, risulta

$$A_{ii}^{kh} = \begin{pmatrix} a + (a + 2b)\delta_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & a + (a + 2b)\delta_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & a + (a + 2b)\delta_{ik} \end{pmatrix},$$

³⁴Adrien-Marie Legendre (Tolosa 1752 - Parigi 1833). Scrisse un testo fondamentale di teoria dei numeri e uno sugli integrali ellittici.

$$\begin{aligned}
A_{21}^{hk} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & A_{12}^{hk} &= \begin{pmatrix} 0 & a+2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_{32}^{hk} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2b & 0 \end{pmatrix} & A_{23}^{hk} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_{31}^{hk} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a+2b & 0 & 0 \end{pmatrix} & A_{13}^{hk} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'operatore soddisfa la condizione di *Legendre-Hadamard*:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^3 \sum_{h,k=1}^3 A_{ij}^{hk} \xi_i \xi_j \eta_h \eta_k &= a [(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)]^2 [(\eta_1)^2 + (\eta_2)^2 + (\eta_3)^2] + \\
&+ (a+2b) [(\xi_1 \eta_1)^2 + (\xi_2 \eta_2)^2 + (\xi_3 \eta_3)^2]^2 \geq a \|\xi\|_3^2 \|\eta\|_3^2,
\end{aligned}$$

ma non soddisfa la *Condizione di Legendre*. Infatti per ogni $\eta_i = (\eta_i^1, \eta_i^2, \eta_i^3) \in \mathbb{R}^3$ $i = 1, 2, 3$, si ha

$$\sum_{i,j=1}^3 (A_{ij} \eta_i | \eta_j)_3 = (2a+2b) [(\eta_1^1)^2 + (\eta_2^2)^2 + (\eta_3^3)^2]^2 + (2a+4b) [(\eta_1^2 \eta_2^1 + \eta_3^1 \eta_1^3 + \eta_3^2 \eta_2^3)],$$

se scegliamo η_1, η_2, η_3 tali che $\eta_1^1 = \eta_2^2 = \eta_3^3 = 0$, $\eta_2^1 = \eta_1^3 = \eta_3^1 = \eta_3^2 = 1$ e $\eta_1^2 = \eta_2^3 = -1$, risulta

$$\sum_{i,j=1}^3 (A_{ij} \eta_i | \eta_j)_3 < 0.$$

Capitolo 2

L'equazione delle onde

2.1 Esempi di risoluzione con metodi elementari di alcune equazioni alle derivate parziali

In questa parte ci proponiamo di determinare le **soluzioni classiche** di alcune equazioni notevoli mediante metodi elementari, in particolare vogliamo arrivare a risolvere alcuni problemi legati all'equazione delle onde unidimensionale. Ricordiamo che l'equazione delle onde é di tipo iperbolico.

Esempio 2.1.1

Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

la soluzione di questa non dipende da x , è costante quindi rispetto a questa variabile, di conseguenza dipende solo da y :

$$u(x, y) = w(y),$$

dove w è una qualunque funzione della variabile y .

Esempio 2.1.2

Consideriamo

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2.2)$$

tenuto conto dell'esempio (2.1.1):

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = w(y),$$

dove se $w \in C^0(\mathbb{R})$ allora

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y w(t) dt + v_1(x),$$

da cui deduciamo che l'insieme delle soluzioni di (2.2) è del tipo

$$u(x, y) = v_1(x) + v_2(y),$$

dove v_1, v_2 sono funzioni di una variabile.

Esempio 2.1.3

Vogliamo risolvere

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y), \quad (2.3)$$

dove $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Integrando tra x_0 e x rispetto alla prima variabile e tra y_0 e y rispetto alla seconda otteniamo

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(s, t) ds dt + v_1(x) + v_2(y),$$

dove v_1 e v_2 sono funzioni di una variabile.

Esempio 2.1.4

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (2.4)$$

Questa equazione é equivalente alla seguente⁽¹⁾

$$\nabla u(x, y) \cdot (1, -1) = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = 0 \text{ dove } \nu = (1, -1).$$

Quindi u é costante sulle rette $y = -x + c$. Consideriamo il cambiamento di coordinate $(\xi, \eta) = \Phi(x, y)$ definito da

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2}, \\ y = \frac{\xi - \eta}{2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ponendo $v = u(\Phi^{-1}(\xi, \eta))$, segue

$$\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{-1}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2^{-1}}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Da cui, tenuto conto dell'Esempio (2.1.1), possiamo scrivere

$$v(\xi, \eta) = w(\xi),$$

dove w é una qualunque funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$. Tenuto conto di (2.5), le soluzioni di (2.4) sono del tipo

$$u(x, y) = w(x + y).$$

In maniera analoga si risolve:

$$\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

ottenendo

$$u(x, y) = w(\beta x - \alpha y).$$

Esempio 2.1.5

¹ $(\mathbf{w}|\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}$ é il prodotto scalare tra i vettori \mathbf{w} e \mathbf{v} di \mathbb{R}^n .

Consideriamo l'equazione iperbolica:

$$\square u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (2.7)$$

Posto $\nu_1 = (1, 1)$, $\nu_2 = (1, -1)$, si ha che l'equazione data equivale alla seguente:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \nu_1 \partial \nu_2} = 0. \quad (2.8)$$

Eseguiamo il cambiamento di coordinate $(\xi, \eta) = \Phi(x, y)$ come nell'Esempio (2.1.4), ovvero

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2}, \\ y = \frac{\xi - \eta}{2}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Posto $w(\xi, \eta) = u(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, segue

$$\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.10)$$

Per quanto visto nell'esempio (2.1.2), l'insieme delle soluzioni di (2.10) é del tipo

$$w(\xi, \eta) = v_1(\xi) + v_2(\eta),$$

e quindi

$$u(x, y) = v_1(x + y) + v_2(x - y),$$

dove v_1 e v_2 sono funzioni di classe $C^2(\mathbb{R})$.

In maniera simile si risolve l'equazione:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (2.11)$$

prendendo come vettori

$$v_1 = \left(1, \frac{1}{t}\right), \quad v_2 = \left(1, -\frac{1}{t}\right).$$

Infatti prendendo come cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} \xi = x + ty, \\ \eta = x - ty, \end{cases} \quad (2.12)$$

si ottengono soluzioni del tipo

$$u(x, y) = v_1(x + ty) + v_2(x - ty), \quad (2.13)$$

dove v_1 e v_2 sono funzioni di classe $C^2(\mathbb{R})$. In particolare:

$$v_1(x, y) = (x + ty)^n \quad \text{e} \quad v_2(x, y) = (x - ty)^n \quad (2.14)$$

sono soluzioni di (2.11).

2.2 Un esempio di risoluzione per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale

Consideriamo il seguente problema (Problema di Cauchy)

$$\begin{cases} D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \alpha(x), & x \in \mathbb{R}, \\ D_t u(x, 0) = \beta(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.15)$$

dove $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ sono funzioni assegnate. Per quanto visto nei paragrafi precedenti l'insieme delle soluzioni dell'equazione é costituito da funzione del tipo

$$u(x, t) = v_1(x + t) + v_2(x - t), \quad v_1, v_2 \in C^2(\mathbb{R}) \quad (2.16)$$

Imponendo alla funzione (2.16) le condizioni iniziali di (2.15) otteniamo:

$$u(x, 0) = v_1(x) + v_2(x) = \alpha(x) \quad (2.17)$$

$$D_t u(x, 0) = v_1'(x) - v_2'(x) = \beta(x). \quad (2.18)$$

Derivando (2.17) otteniamo:

$$v_1'(x) + v_2'(x) = \alpha'(x), \quad (2.19)$$

che con (2.18) forma un sistema di equazioni algebriche nelle incognite v_1' e v_2' che ha le seguenti soluzioni:

$$v_1' = \frac{\alpha'(x) + \beta(x)}{2}; \quad v_2' = \frac{\alpha'(x) - \beta(x)}{2}. \quad (2.20)$$

Da cui:

$$v_1(x) = \frac{\alpha(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \beta(\xi) d\xi + C_1, \quad (2.21)$$

$$v_2(x) = \frac{\alpha(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \beta(\xi) d\xi + C_2. \quad (2.22)$$

Inoltre da queste relazioni e da (2.17) segue:

$$v_1 + v_2 = \alpha(x) + C_1 + C_2 = \alpha(x) \iff C_1 + C_2 = 0.$$

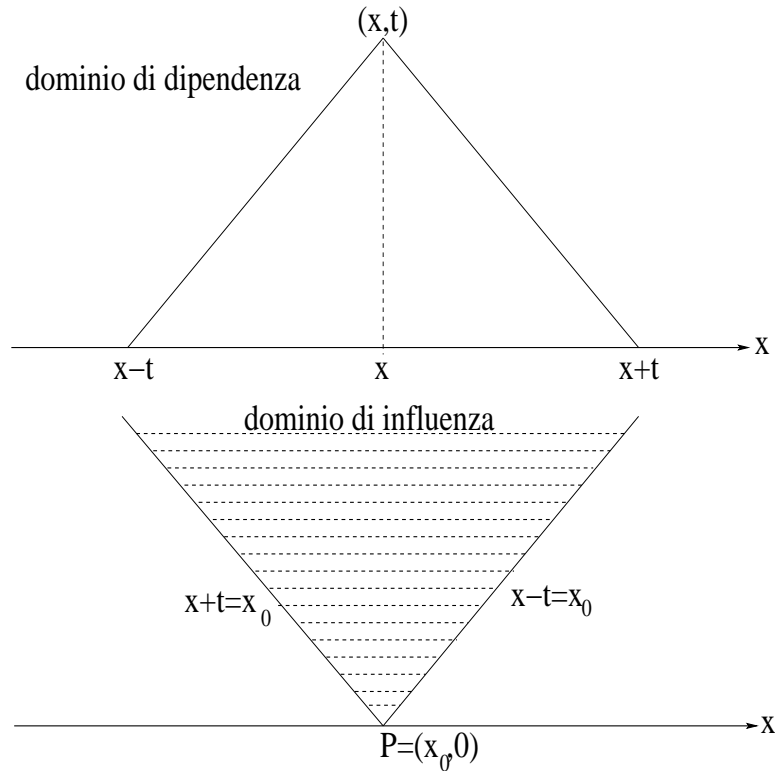
Tenuto conto di questo, da (2.16), (2.21), (2.22) otteniamo che la soluzione del Problema (2.15) è la seguente:

$$u(x, t) = v_1(x + t) + v_2(x - t) = \frac{\alpha(x + t) + \alpha(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \beta(\xi) d\xi. \quad (2.23)$$

Osserviamo che il valore di u nel punto (x, t) dipende solo dal valore assunto dal dato iniziale a negli estremi dell'intervallo $I = [x + t, x - t]$ e dai valori assunti nello stesso intervallo.

I si chiama **dominio di dipendenza di** (x, t) .

Viceversa ci possiamo chiedere: dato un punto P sulla retta $t = 0$ quali sono i punti (x, t) influenzati da esso? L'insieme dei punti (x, t) influenzati da P si chiama **dominio di influenza di** P ed è descritta dalla seguente figura



Consideriamo ora l'equazione delle onde non omogenea

$$D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (2.24)$$

Determiniamo u integrando sul dominio D delimitato dalle rette $t = 0$, $t = \xi_1 - x$, $t = x - \xi_2$. Si osservi che la base del triangolo è il dominio di dipendenza del vertice.

$$\iint_D [D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t)] dx dt = \iint_D f(x, y) dx dt, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (2.25)$$

Applichiamo al primo membro di (2.25) la formula di Gauss-Green⁽²⁾ e valutiamo su ciascuna dei tre segmenti C_1 , C_2 , C che compongono ∂D gli integrali curvilinei della formula, tenendo presente che possiamo esprimere ciascun segmento come sostegno delle curve seguenti:

$$C_1 : \begin{cases} x(s) = s\xi + (1-s)\xi_1 \\ t(s) = s\eta \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x(s) = s\xi_2 + (1-s)\xi \\ t(s) = (1-s)\eta \end{cases} \quad C : \begin{cases} x(s) = s\xi_1 + (1-s)\xi_2 \\ t(s) = 0 \end{cases}, \quad s \in [0, 1].$$

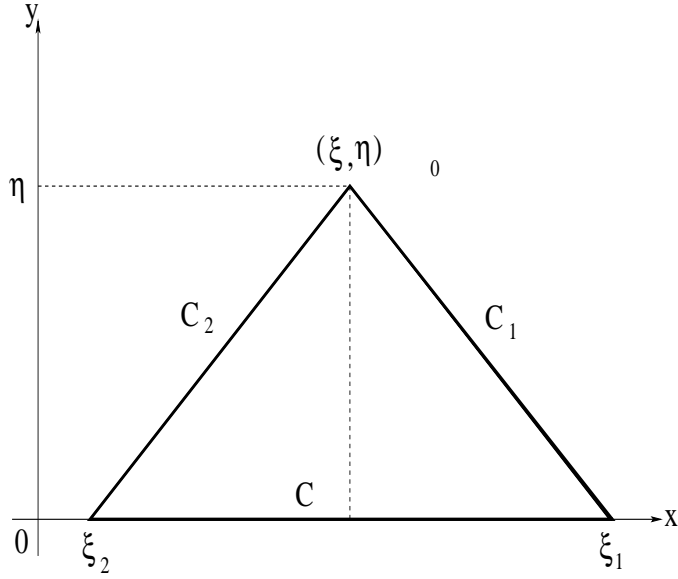
2

$$\iint_D \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial D^-} g dx_1.$$

(∂D è percorsa in senso antiorario). Analoga formula per $\frac{\partial g}{\partial x_1}$ con il segno $-$ davanti all'integrale.

Karl Friedrich Gauss (Brunswick 1777 - Gottinga 1855) È considerato uno dei più grandi geni scientifici di tutti i tempi. Le sue opere riguardano i più svariati campi della fisica e della matematica.

George Green (Sneinton, Nottingham, 1793 - ivi 1841) Lavorò nei più svariati campi della fisica matematica. Di lui si ricorda in particolare il contributo dato alla teoria del potenziale.



$$\int_{C_2} D_t u dx + D_x u dt = \int_0^1 [D_t u(x(s), t(s)) (\xi - \xi_2) + D_x u(x(s), t(s)) \eta] ds =$$

(tenedo conto che i punti si muovono su C_2 che ha coefficiente angolare uguale a uno)

(2.26)

$$\int_0^1 [D_t u(x(s), t(s)) (\eta) + D_x u(x(s), t(s)) (\xi - \xi_2)] ds =$$

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) ds = u(\xi, \eta) - u(\xi_2, 0)$$

Analogamente

$$\int_{C_1} D_t u dx + D_x u dt = \int_0^1 [D_t u(x(s), t(s)) (\xi_1 - \xi) - D_x u(x(s), t(s)) \eta] ds =$$

(tenedo conto che i punti si muovono su C_1 che ha coefficiente angolare uguale a meno uno)

(2.27)

$$- \int_0^1 [D_t u(x(s), t(s)) (-\eta) + D_x u(x(s), t(s)) (\xi_1 - \xi)] ds =$$

$$- \int_0^1 \frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) ds = u(\xi, \eta) - u(\xi_1, 0)$$

$$\int_C D_t u dx + D_x u dt = \int_0^1 [D_t u(s\xi_2 + (1-s)\xi_1, 0) (\xi_2 - \xi_1)] ds =$$

$$(\xi_2 - \xi_1) \int_0^1 [D_t u(s\xi_2 + (1-s)\xi_1, 0)] ds =$$

(2.28)

(cambio variabile)

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} D_t(u(x), 0) dx.$$

Da (2.25), (2.27), (2.28) e (2.29) otteniamo

$$2u(\xi, \eta) - u(\xi_1, 0) - u(\xi_2, 0) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} D_t(u(x), 0) dx = \iint_D f(x, y) dx dt.$$

Da cui

$$u(\xi, \eta) = \frac{u(\xi_1, 0) + u(\xi_2, 0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\xi_2}^{\xi_1} D_t(u(x), 0) dx + \frac{1}{2} \iint_D f(x, y) dx dt. \quad (2.29)$$

Si noti anche in questo caso la dipendenza della soluzione dai valori assunti dai dati iniziali nel dominio di dipendenza e dai valori del termine noto f su D .

2.3 Il problema di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per l'equazione delle onde unidimensionale

Consideriamo i problemi seguenti. Problema di Cauchy-Dirichlet⁽³⁾:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \in C^2([a, b] \times [0, +\infty)), \\ D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = 0, & x \in [a, b], t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [a, b], \\ D_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in [a, b], \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, & t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Problema di Cauchy-Neumann:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \in C^2([a, b] \times [0, +\infty)), \\ D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = 0, & x \in [a, b], t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [a, b], \\ D_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in [a, b], \\ D_x u(a, t) = D_x u(b, t) = 0, & t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Le condizioni iniziali relative all'equazione delle onde viste nel paragrafo precedente sono date sulla retta $t = 0$; ad esse nei problemi (2.30), (2.31) si sono aggiunte le condizioni sui lati dell'intervallo $[a, b]$, quindi la formula risolutiva vista, che permette di calcolare direttamente la soluzione, non è direttamente applicabile in questo caso. Si deve quindi procedere in altro modo che vedremo dopo aver dimostrato il seguente teorema di unicità di soluzione.

Teorema 2.3.1 *I problemi (2.30) e (2.31) hanno unicità di soluzione.*

Supponiamo per assurdo che abbiano due soluzioni u_1, u_2 . Posto $u = u_1 - u_2$, risulta che u risolve

³Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren 1805 - Gottinga 1859). Fu professore all'università di Berlino e di Gottinga dove successe a Gauss. Alla sua scuola si formarono importanti matematici. Ha lasciato importanti opere su teoria dei numeri, fondamenti dell'analisi, meccanica e fisica matematica.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2([a, b] \times [0, +\infty)), \\ D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = 0, \quad x \in [a, b], t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [a, b], \\ D_t u(x, 0) = 0, \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \geq 0, \text{ (oppure } D_x u(a, t) = D_x u(b, t) = 0 \text{)}. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Moltiplichiamo l'equazione di (2.32) per $D_t u$ ed integriamo su $[a, b]$:

$$\int_a^b D_{tt}u(x, t) D_t u(x, t) dx - \int_a^b D_{xx}u(x, t) D_t u(x, t) dx = 0, \quad (2.33)$$

da cui⁽⁴⁾

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b [D_t u(x, t)]^2 dx + \int_a^b D_{tx}u(x, t) D_x u(x, t) dx = 0, \quad (2.34)$$

osservato che

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b [D_x u(x, t)]^2 dx = \int_a^b D_{tx}u(x, t) D_x u(x, t),$$

poniamo, per ogni $t \geq 0$,

$$E(t) = \int_a^b [D_t u(x, t)]^2 + [D_x u(x, t)]^2 dx. \quad (2.35)$$

Questa funzione di t si chiama **energia del sistema**. Da (2.34) segue

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0,$$

ovvero

$$E(t) = \text{costante su } (0, +\infty)$$

ed essendo

$$D_t u(x, 0) = D_x u(x, 0) = 0 \quad (\forall x \in [a, b], u(x, 0) = 0 \implies D_x u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [a, b].)$$

segue

$$E(0) = 0$$

quindi

$$E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.36)$$

Quindi da (2.35) e (2.36):

$$D_t u(x, t) = 0, \quad D_x u(x, t) = 0, \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall t \in (0, +\infty),$$

⁴Infatti:

$$\int_a^b D_t u D_{xx}^2 u dx = \left[\frac{d}{dx} (D_t u D_x u) \right]_a^b - \int_a^b D_{tx} D_x u dx$$

essendo $u(a, t) = u(b, t) = 0$, per ogni $t \geq 0$, risulta $D_t u(a, t) = D_t u(b, t) = 0$, per ogni $t \geq 0$, oppure $D_x u(a, t) = D_x u(b, t) = 0$, per ogni $t \geq 0$, come nel caso del problema di Neumann.

ossia

$$u(x, t) = \text{costante su } (a, b) \times (0, +\infty)$$

ne segue che essendo nulli i valori iniziali di u risulta

$$u(x, t) = 0 \text{ su } (a, b) \times (0, +\infty),$$

quindi $u_1 = u_2$.

Torniamo ora al problema dell'esistenza di soluzione di (2.30) e (2.31) esponendo uno dei vari modi con i quali può essere risolto ovvero il metodo che utilizza un'equazione alle differenze. Dimostriamo come primo passo il seguente teorema.

Teorema 2.3.2 *Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. u è soluzione di*

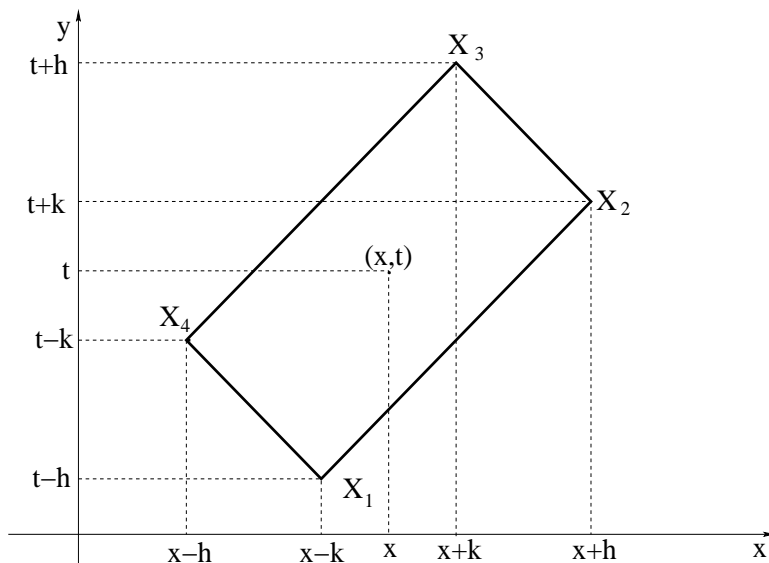
$$D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = 0 \tag{2.37}$$

se e solo se u è soddisfa l'equazione:

$$u(X_1) + u(X_3) = u(X_2) + u(X_4), \tag{2.38}$$

dove X_1, X_2, X_3, X_4 sono vertici di un rettangolo qualunque avente i lati sulle curve caratteristiche dell'equazione (2.37) (vedi figura), ovvero

$$X_1 = (x - k, t - h), \quad X_2 = (x + h, t + k), \quad X_3 = (x + k, t + h), \quad X_4 = (x - h, t - k).$$



Dimostrazione.

Le soluzioni dell'equazione (2.37) sono del tipo (vedi Esempio (2.1.5)):

$$u(x, t) = w_1(x + t) + w_2(x - t).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} u(X_1) + u(X_3) &= w_1(x - k + t - h) + w_2(x - k - t + h) + \\ &+ w_1(x + k + t + h) + w_2(x + k - t - h) = \\ &= w_1(x - h + t - k) + w_2(x - h - t + k) + \\ &+ w_1(x + h + t + k) + w_2(x + h - t - k) = u(X_4) + u(X_2). \end{aligned}$$

Risulta quindi verificata (2.38).

Viceversa supponiamo che u verifichi (2.38). Per dimostrare che u è soluzione di (2.37) basta provare che per ogni rettangolo D , avente i lati sulle curve caratteristiche, vale

$$\iint_D (D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t)) dx dt = 0. \quad (2.39)$$

Che è come dire che la media integrale della funzione $D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t)$ è nulla su ogni rettangolo D con i lati sulle curve caratteristiche e con centro in (x, t) . Infatti indicato con $D(x, t, a, b)$ uno di questi rettangoli di centro (x, t) e lunghezza dei lati a, b . Per il teorema sulla la media integrale possiamo scrivere

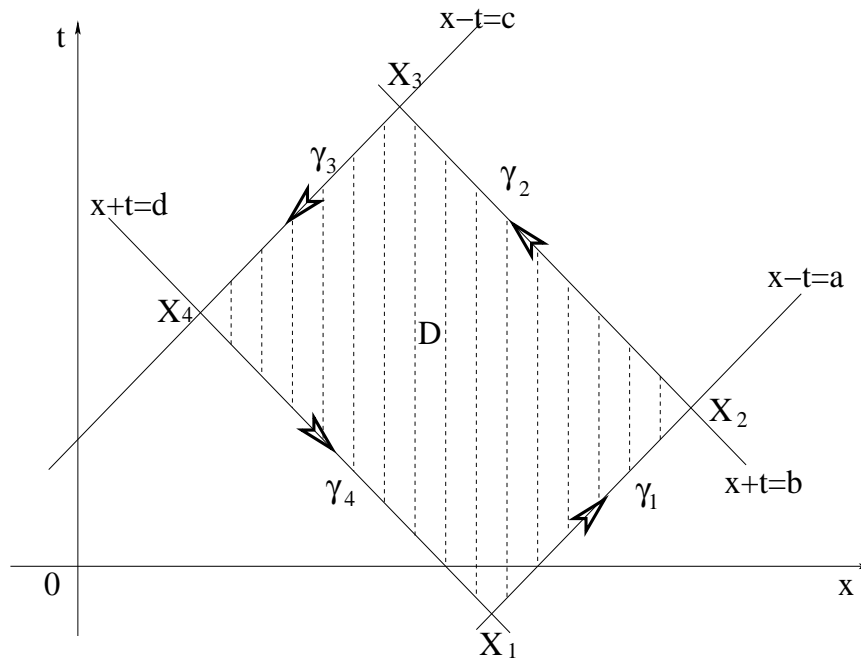
$$\frac{1}{\text{mis } D(x, t, a, b)} \iint_D (D_{tt}u(\xi, s) - D_{xx}u(\xi, s)) d\xi ds = D_{tt}u(y, \sigma) - D_{xx}u(y, \sigma), \quad (2.40)$$

dove (y, σ) è un punto di $D(x, t, a, b)$. Per (a, b) che tende a $(0, 0)$, (y, σ) tende a (x, y) , ne segue che per la continuità di $D_{tt}u - D_{xx}u$ anche la sua media integrale tende a $D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t)$ e quindi per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = 0.$$

Dimostriamo (2.39)

La frontiera ∂D di D può essere vista come unione dei sostegni delle curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, ciascuna delle quali ha per sostegno un lato del rettangolo D , vedi figura.



Posto: $\gamma_i = (x_i(s), t_i(s))$ con $s \in I_i$ (I_i intervallo di \mathbb{R}), $i = 1, 2, 3, 4$, osserviamo che trattandosi delle curve caratteristiche dell'equazione considerata risulta

$$\dot{x}_1(s) = \dot{t}_1(s), \quad \dot{x}_3(s) = \dot{t}_3(s), \quad \dot{x}_2(s) = -\dot{t}_2(s), \quad \dot{x}_4(s) = -\dot{t}_4(s). \quad (2.41)$$

Dalle formule di Gauss-Green⁽⁵⁾ segue la tesi:

$$\begin{aligned}
-\iint_D [D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t)] dx dt &= \int_{\partial D} D_t u(x, t) dx + \int_{\partial D} D_x u(x, t) dt = \\
&= - \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_{I_i} D_t u(\gamma_i(s)) \dot{x}_i(s) ds + \int_{I_i} D_x u(\gamma_i(s)) \dot{t}_i(s) ds \right\} = \\
&\hspace{15em} \text{per (2.41)} \\
&= \int_{I_1} D_t u(\gamma_1(s)) \dot{t}_1(s) ds + \int_{I_1} D_x u(\gamma_1(s)) \dot{x}_1(s) ds + \\
&\quad - \int_{I_2} D_t u(\gamma_2(s)) \dot{t}_2(s) ds - \int_{I_2} D_x u(\gamma_2(s)) \dot{x}_2(s) ds + \\
&\quad + \int_{I_3} D_t u(\gamma_3(s)) \dot{t}_3(s) ds + \int_{I_3} D_x u(\gamma_3(s)) \dot{x}_3(s) ds + \\
&\quad - \int_{I_4} D_t u(\gamma_4(s)) \dot{t}_4(s) ds - \int_{I_4} D_x u(\gamma_4(s)) \dot{x}_4(s) ds = \\
&\hspace{15em} = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \int_{I_i} \left[\frac{d}{ds} u(\gamma_i(s)) \right] ds = \\
&= u(X_2) - u(X_1) - [u(X_3) - u(X_2)] + u(X_4) - u(X_3) - [u(X_1) - u(X_4)] = \\
&= 2[u(X_4) + u(X_2) - u(X_1) - u(X_3)] = 0 \quad (\text{per (2.38)}).
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'esistenza di soluzione dei problemi (2.30) e (2.31).

Teorema 2.3.3 *Il problema (2.30) (o (2.31)) ammette una ed una sola soluzione.*

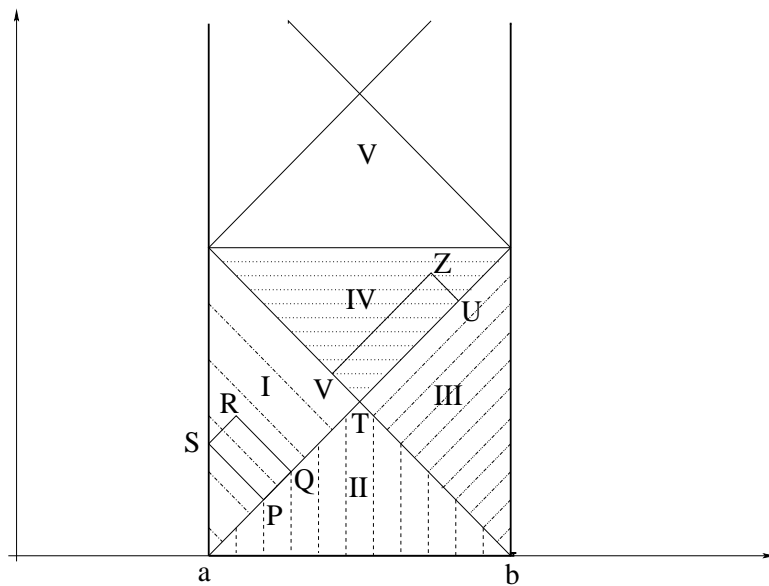
Dimostrazione.

L'unicità è conseguenza del teorema (2.30). Per quanto riguarda l'esistenza si procede come segue. Consideriamo una suddivisione del dominio $(a, b) \times (0, +\infty)$ effettuata come in figura:

⁵Sia $f \in C^1(D)$, allora

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 &= \int_{\partial D^+} f dx_2 = \int_a^b f(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \dot{\sigma}_2(t) dt, \\
\iint_D \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 &= \int_{\partial D^-} f dx_1 = \int_a^b f(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \dot{\sigma}_1(t) dt.
\end{aligned}$$

dove ∂D^+ (∂D^-) è la frontiera percorsa in verso antiorario (orario), e $\sigma : [a, b] \rightarrow \partial D$ è una sua parametrizzazione con $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$.



la regione I è delimitata dall'asse delle x e dalle curve caratteristiche $y = x - a$ e $y = -x + b$.

la regione II è delimitata dalla semiretta (a, y) , con $y > 0$, e dalle curve caratteristiche $y = -x + b$, $y = x - a$.

la regione III è delimitata dalla semiretta (b, y) , con $y > 0$, e dalle curve caratteristiche $y = -x + b$ e $y = x - a$.

la regione IV è delimitata dalle curve caratteristiche $y = x - a$, $y = -x + b$ e dalla retta $y = b - a$.

Analogamente per V e le altre regioni. Consideriamo ciascuno dei casi sopra elencati distinguendo le varie situazioni che si presentano.

- (a) Se il punto (x, t) appartiene alla regione II il valore della soluzione nel punto è dato dalla formula (2.23) (o (2.29)).
- (b) Se (x, t) appartiene alla regione I indicatolo con R , consideriamo il rettangolo $RSPQ$ dove S appartiene alla semiretta (a, y) con $y > 0$, mentre P, Q appartengono alla retta $y = x - a$. I valori di u nei punti P e Q si determinano come in a). Il valore di u in S è invece un dato del problema (dato al bordo). Il valore di u in R segue quindi dalla formula (2.38).
- (c) Se $(x, t) \in III$ si procede come in (b).
- (d) Se il punto $(x, t) \in IV$, posto $Z = (x, t)$, consideriamo il rettangolo di vertici $VTUZ$ (vedi figura), con V, T, U appartenenti alle curve caratteristiche. I valori di V e U si determinano rispettivamente con il metodo indicato in (b) e (c). Il valore di u in T si determina con il metodo indicato in (a). Il valore di u in Z segue quindi dalla formula (2.38).
- (e) Se il punto $(x, t) \in V$ o alle altre regioni si procede in modo analogo a quello esposto sopra.

OSSERVAZIONE.

È evidente che per dimostrare l'esistenza e l'unicità di soluzione dei seguenti **problemi non omogenei** si procede come sopra:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2([a, b] \times [0, +\infty)), \\ D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \\ D_t u(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Problema di Cauchy-Neumann:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2([a, b] \times [0, +\infty)), \\ D_{tt}u(x, t) - D_{xx}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \\ D_t u(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [a, b], \\ D_x u(a, t) = D_x u(b, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.43)$$

dove $f \in C^0([a, b] \times [0, +\infty))$.

Infatti la dimostrazione dell'unicità di soluzione è identica in quanto le equazioni sono lineari. Mentre l'equazione (2.38) nel caso non omogeneo diventa

$$u(X_1) + u(X_3) = u(X_2) + u(X_4) + \iint_D f(x, t) \, dx \, dt.$$

La dimostrazione del teorema di esistenza nel caso non omogeneo è quindi identica a quella del teorema 2.3.3.

Abbiamo in definitiva dimostrato che i problemi (2.42) e (2.43) hanno esistenza ed unicità di soluzione. Per verificare che sono *ben posti nel senso di Hadamard* verifichiamo che la soluzione di ciascun problema dipende con continuità dai dati, ovvero proviamo il seguente

Teorema 2.3.4 *Sia $u \in C^2([a, b] \times [0, +\infty))$ la soluzione di (2.42) (oppure di (2.43)), vale la maggiorazione per ogni $t \geq 0$*

$$\int_a^b [D_t u(x, t)]^2 + [D_x u(x, t)]^2 \, dx \leq e^t \left[\int_a^b [u_1(x)]^2 + [D_x u_0(x)]^2 \, dx + \int_0^t \int_a^b |f(x, s)|^2 \, dt \, ds \right]. \quad (2.44)$$

Si osservi che se i dati tendono a zero anche la soluzione tende a zero, ovvero dato che il problema è lineare, esso dipende con continuità dai dati.

Dimostrazione.

Procediamo come nella dimostrazione dell'unicità moltiplicando l'equazione per $D_t u$, integrando su $[a, b]$ e applicando la formula di integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_a^b D_{tt}u(x, t) D_t u(x, t) \, dx - \int_a^b D_{xx}u(x, t) D_t u(x, t) \, dx &= \int_a^b f(x, t) D_t u(x, t) \, dx \iff \\ \iff \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b [D_t u(x, t)]^2 + [D_x u(x, t)]^2 \, dx &= \int_a^b f(x, t) D_t u(x, t) \, dx. \end{aligned}$$

Integriamo primo e secondo membro rispetto alla variabile t tra 0 e s ed applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b [D_t u(x, s)]^2 + [D_x u(x, s)]^2 dx = \int_a^b [D_t u(x, 0)]^2 + [D_x u(x, 0)]^2 dx + 2 \int_0^s \int_a^b f(x, t) D_t u(x, t) dx dt.$$

Prendiamo il modulo del primo e del secondo membro, applichiamo la disuguaglianza triangolare⁽⁶⁾ e l'assoluta continuità dell'integrale⁽⁷⁾ otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_a^b [D_t u(x, s)]^2 + [D_x u(x, s)]^2 dx \leq \\ & \leq \int_a^b [D_t u(x, 0)]^2 + [D_x u(x, 0)]^2 dx + 2 \int_0^s \int_a^b |f(x, t)| |D_t u(x, t)| dx dt. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tenuto conto della posizione (2.35) possiamo scrivere per ogni $s \geq 0$

$$E(s) \leq E(0) + 2 \int_0^s \int_a^b |f(x, t)| |D_t u(x, t)| dx dt. \quad (2.46)$$

Applichiamo la disuguaglianza⁽⁸⁾ di Schwarz-Hölder⁽⁹⁾ all'integrale del secondo membro e la maggiorazione interpolatoria $2AB \leq A^2 + B^2$

$$\begin{aligned} & \int_0^s \int_a^b |f(x, t)| |D_t u(x, t)| dx dt \leq \int_0^s \left[\int_a^b |f(x, t)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |D_t u(x, t)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^s \int_a^b |f(x, t)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^s \int_a^b |D_t u(x, t)|^2 dx dt \leq \\ & \text{(tenuto conto di (2.35))} \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^s \int_a^b |f(x, t)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^s E(t) dt. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da (2.46) e (2.47) segue

$$E(s) \leq E(0) + \int_0^s \int_a^b f(x, t) dt + \int_0^s E(t) dt, \quad (2.48)$$

la tesi viene ottenuta applicando a questa la disuguaglianza di Gronwall⁽¹⁰⁾:

$$E(s) \leq e^s \left[E(0) + \int_0^s \int_a^b f(x, t) dt \right].$$

⁶Per ogni $X, Y \in \mathbb{R}$: $|X + Y| \leq |X| + |Y|$.

⁷ $|\iint_D \Phi(x, t) dx dt| \leq \iint_D |\Phi(x, t)| dx dt$.

⁸Se f e g sono funzioni continue su $[a, b]$ allora

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

⁹Karl Hermann Amandus Schwarz (Hemsdorf, Slesia 1843 - Berlino 1921). Insegno nelle università di Halle, Gottinga, Zurigo e Berlino. si occupò della teoria delle superfici minime e delle funzioni armoniche.

Ludwig Otto Hölder (Stoccarda 1859 - Lipsia 1937). Insegnò a Gottinga, Tubinga, Königsberg e Lipsia, si occupò della teoria dei gruppi e della teoria delle funzioni.

¹⁰Siano v, g e h di classe $C^0([0, +\infty))$, con $v, g, h \geq 0$, se per ogni $s \geq 0$ vale

$$v(s) \leq v(0) + \int_0^s g(t) dt + \int_0^s h(t) v(t) dt$$

allora

$$v(s) \leq e^{\int_0^s h(t) dt} \left[v(0) + \int_0^s g(t) dt \right].$$

Thomas Hakon Grönwall (Dylta bruk, Svezia 1877 - New York City 1932). Studiò ad Upsala e Stoccolma. Emigrato negli Stati Uniti nel 1904 insegnò alle università di Princeton e di Columbia.

Capitolo 3

L'operatore Δ

3.1 L'operatore Δ e il calcolo delle variazioni.

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , consideriamo il *funzionale dell'energia*

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx = \mathcal{E}_e(u) - \mathcal{E}_p(u), \quad (3.1)$$

sulla classe delle funzioni (ammissibili)

$$\mathcal{A} = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tali che } u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega, \mathcal{F}(u) < +\infty\} \quad (3.2)$$

dove φ è una funzione assegnata e inoltre

$$\mathcal{E}_e(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, \text{ (energia elastica interna);}$$

$$\mathcal{E}_p(u) = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx, \text{ (energia potenziale esogena).}$$

Teorema 3.1.1 *Sia $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Se esiste $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ che minimizza \mathcal{F} su \mathcal{A} , cioè per ogni $u \in \mathcal{A}$*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{F}(u) \quad (3.3)$$

allora \mathbf{u} è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}(x) & = f(x) & x \in \Omega \\ \mathbf{u}(x) & = \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

Viene naturale porsi delle domande prima di dare un'idea della dimostrazione.

- 1) Quali proprietà debbono avere φ e Ω affinché esista una funzione u definita su Ω tale che $u = \varphi$ su $\partial\Omega$ e $\mathcal{F}(u) < +\infty$?
- 2) Esiste il minimo di $\mathcal{F}(u)$ sull'insieme \mathcal{A} ?

Le risposte a queste domande non sono semplici e costituiscono uno dei principali problemi della parte dell'Analisi Matematica chiamata *Calcolo delle Variazioni*.

Dimostrazione del teorema.

Posto

$$\mathcal{A}_0 = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tali che } u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \mathcal{F}(u) < +\infty\},$$

osserviamo che fissati $u \in \mathcal{A}$ e $v \in \mathcal{A}_0$ allora

$$\forall t \in \mathbb{R}, u + tv \in \mathcal{A}.$$

Consideriamo quindi la funzione definita su \mathbb{R}

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathcal{F}(u + tv) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla(u + tv)\|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)[u(x) + tv(x)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\|\nabla u\|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla v + t^2 \|\nabla v\|^2] dx - \int_{\Omega} f(x)u(x) dx - t \int_{\Omega} f(x)v(x) dx = \\ &= \mathcal{E}_e(u) + t^2 \mathcal{E}_e(v) + t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \mathcal{E}_p(u) - t \mathcal{E}_p(v) \end{aligned}$$

Se prendiamo nella identità qui sopra al posto di u la funzione \mathbf{u} , che minimizza il funzionale \mathcal{F} su \mathcal{A} otteniamo

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{F}(\mathbf{u} + tv)$$

ovvero

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(0) \leq F(t)$$

Poiché F ha in $t = 0$ un minimo, si deve avere

$$F'(0) = 0$$

per cui

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla v - f(x)v(x)] dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{A}_0. \quad (3.5)$$

Diremo che \mathbf{u} **soddisfa l'equazione variazionale** (3.5) ovvero che \mathbf{u} è **soluzione debole** di (3.5). Ora ci chiediamo se \mathbf{u} che è soluzione debole di (3.5) è anche una soluzione forte (oppure classica) di un'equazione puntuale? La risposta è data dal Lemma dimostrato sotto che giustifica le identità

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla v - f(x)v(x)] dx = - \int_{\Omega} \{div(\nabla \mathbf{u}) + f(x)\} v(x) dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{A}_0.$$

Da cui

$$div(\nabla \mathbf{u}) + f(x) = 0 \iff -\Delta \mathbf{u} = f.$$

Lemma 3.1.1 *Sia $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \in C^1(\overline{\Omega})$ che soddisfa l'equazione*

$$\int_{\Omega} U(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x) dx = 0 \quad (3.6)$$

per ogni $v \in \mathcal{A}_0$, v con supporto compatto in Ω ,¹ allora per ogni $x \in \Omega$

$$div U(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.7)$$

Dimostrazione.

Dal teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} U(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} [div U(x)] v(x) dx + \int_{\partial\Omega} [U(x) \cdot \nu] v(x) - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad (3.8)$$

dove ν è il versore normale esterno a $\partial\Omega$. Poiché $v = 0$ su $\partial\Omega$, da (3.8) segue che

$$-div U(x) - f(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \Omega.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il seguente lemma, con $w = -div U - f$,

¹Ovvero v è nulla fuori di un insieme limitato e chiuso contenuto in Ω ed $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Si osservi che questo implica che $v = 0$ su $\partial\Omega$.

Lemma 3.1.2 Se $w \in C^0(\overline{\Omega})$ è tale che per ogni $v \in \mathcal{A}_0$ risulta

$$\int_{\Omega} w(x) v(x) dx = 0$$

allora $w(x) = 0$, per ogni $x \in \Omega$.

Dimostrazione.

Per assurdo: se esistesse $x_0 \in \Omega$ tale che $w(x_0) \neq 0$, ad esempio $w(x) > 0$. allora, per la continuità di w esisterebbero una palla $B(x_0, \rho)$, di centro x_0 e raggio ρ , ed un numero $\delta > 0$ tali che per ogni $x \in B(x_0, \rho) \cap \overline{\Omega}$: $w(x) \geq \delta > 0$. Sia v con supporto contenuto in $B(x_0, \rho) \cap \overline{\Omega}^{(2)}$ tale che $v > 0$. Allora

$$\int_{\Omega} w(x) v(x) dx = \int_{B(x_0, \rho) \cap \overline{\Omega}} w(x) v(x) dx \geq \int_{B(x_0, \rho) \cap \overline{\Omega}} \delta v(x) dx > 0$$

3.2 I funzionali dell'energia corrispondenti a modelli di membrana elastica e di piastra sottile.

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il funzionale dell'energia. Questo funzionale nel caso di un aperto di \mathbb{R}^2 viene dedotto dal modello fisico che segue.

Sia u la posizione di equilibrio di una membrana elastica. Il *principio dei valori virtuali* fornisce

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{A}_0. \quad (3.9)$$

Ricordiamo infatti che

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

rappresenta il lavoro effettuato dalle forze elastiche interne in seguito ad uno spostamento virtuale v , mentre

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx,$$

rappresenta quello effettuato dalle forze esterne. L'equazione (3.9) scritta in forma debole equivale ad un'eguaglianza tra i valori dei due integrali. La teoria della regolarità ellittica permette di passare dall'equazione in forma debole a quella scritta in forma forte e quindi ad un problema di Dirichlet. Abbiamo dimostrato che la soluzione del problema di Dirichlet minimizza in \mathcal{A}_0 l'energia potenziale totale \mathcal{F} data da

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{E}_e(u) - \mathcal{E}_p(u),$$

dove $\mathcal{E}_e(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$ è l'energia elastica interna, mentre $\mathcal{E}_p(u) = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$ è l'energia potenziale esogena.

Esaminiamo ora un altro importante modello fisico: **il modello di Kirchoff-Love per una piastra sottile**.

Consideriamo una piastra la cui proiezione verticale sia una regione Ω del piano \mathbb{R}^2 che sia libera di muoversi orizzontalmente sul bordo.

Il modello dell'energia elastica è

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1 - \sigma)(u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}) - f u \right] dx dy, \quad (3.10)$$

²Quindi v è identicamente nulla fuori di questo insieme.

dove f rappresenta il carico esterno verticale. u rappresenta la deformazione della piastra nella direzione verticale. σ è la frazione di Poisson definita da $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, essendo λ la costante di Lamé e μ dipendente dal materiale. Per ragioni fisiche si ha che $\mu > 0$ e di solito $\lambda \geq 0$, quindi $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$.

Procedendo in modo analogo a quello visto sopra, minimizzando il funzionale dell'energia otteniamo la sua equazione di Eulero-Lagrange:

$$\int_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \sigma)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) - f v] dx dy = 0. \quad (3.11)$$

Per ogni v appartenente ad uno spazio opportuno di funzioni. Da questa mediante le formule di Gauss-Green otteniamo la seguente equazione, dove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è il versore della normale esterna, mentre il versore tangente corrispondente è $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta^2 u - f)v dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v ds + \\ &+ (1 - \sigma) \int_{\partial\Omega} [(\nu_1^2 - \nu_2^2)u_{xy} - \nu_1\nu_2(u_{xx} - u_{yy})] \frac{\partial v}{\partial \tau} ds + \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\Delta u + (1 - \sigma)(2\nu_1\nu_2 u_{xy} - \nu_2^2 u_{xx} - \nu_1^2 u_{yy})] \frac{\partial v}{\partial \nu} ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La verifica di questa identità non è difficile, è solo molto noiosa. Se consideriamo il caso della piastra vincolata al bordo, quindi $u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, allora in (3.12) le derivate tangenziali sono nulle dato che la funzione è nulla sul bordo, quindi questa si riduce a

$$0 = \int_{\Omega} (\Delta^2 u - f)v dx dy.$$

Da questa, ragionando come nell'esempio visto in precedenza, otteniamo che la funzione u risolve il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

In questo caso l'energia elastica è

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\Delta u)^2 - f u \right] dx dy, \quad (3.14)$$

3.3 Il principio di massimo per l'operatore di Laplace.

Teorema 3.3.1 *Siano Ω aperto limitato di \mathbb{R}^n e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una funzione subarmonica, ovvero tale che*

$$\Delta u(x) \geq 0, \text{ in } \Omega.$$

Allora

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Ovvero il massimo della funzione viene assunto dalla funzione sul bordo $\partial\Omega$ del dominio Ω .

Come primo passo supponiamo che per ogni $x \in \Omega$

$$\Delta u(x) > 0. \quad (3.15)$$

Se $x_0 \in \Omega^{(3)}$ è punto di massimo assoluto per la funzione u allora in esso la matrice hessiana

$$\left\{ \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1,\dots,n}$$

è semidefinita negativa, ovvero se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i suoi autovalori, risulta

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0.$$

Essendo⁽⁴⁾

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0$$

segue

$$\Delta u(x_0) \leq 0.$$

In contraddizione con (3.15)

Se invece per qualche $x \in \Omega$

$$\Delta u(x) = 0$$

considero, per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\Delta(u(x) + \varepsilon\|x\|^2) = \Delta u(x) + \varepsilon\Delta\|x\|^2 = 2\varepsilon n > 0.$$

Quindi per quanto visto sopra in relazione alle funzioni che hanno il laplaciano strettamente positivo, ovvero che il massimo è assunto sul bordo, possiamo scrivere per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e per ogni ε

$$u(x) \leq u(x) + \varepsilon\|x\|^2 \leq \max_{y \in \partial\Omega} [u(y) + \varepsilon\|y\|^2] \leq [\max_{y \in \partial\Omega} u(y)] + \varepsilon C.$$

Da questa otteniamo per ogni $\varepsilon > 0$ la maggiorazione

$$[\max_{\bar{\Omega}} u(x)] \leq [\max_{x \in \partial\Omega} u(x)] + \varepsilon C.$$

Da questa segue la tesi facendo tendere ε a zero.

Vale anche il seguente **principio di minimo**

Teorema 3.3.2 *Siano Ω aperto limitato di \mathbb{R}^n e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una funzione **superarmonica**, ovvero tale che*

$$\Delta u(x) \leq 0, \text{ in } \Omega.$$

Allora

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Ovvero il minimo della funzione viene assunto dalla funzione sul bordo $\partial\Omega$ del dominio Ω .

Per dimostrarlo basta osservare che se u è superarmonica allora $-u$ è subarmonica ed applicare il teorema precedente:

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \max_{\bar{\Omega}}(-u) = \max_{\partial\Omega}(-u) = \min_{\partial\Omega} u.$$

Si può anche ragionare sulla matrice hessiana come nella dimostrazione del Teorema 3.3.1.

³quindi appartiene alla parte interna dato che Ω è aperto.

⁴Se $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ è una matrice $n \times n$ si definisce traccia di A (si scrive $tr A$) il numero $a_{11} + \dots + a_{nn}$. Si dimostra che se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A allora $tr A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Ossia la somma degli elementi della diagonale principale della matrice coincide con la somma dei suoi autovalori.

Teorema 3.3.3 *Se u è armonica su un aperto Ω di \mathbb{R}^n allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|,$$

$$\min_{\overline{\Omega}} |u| = \min_{\partial\Omega} |u|,$$

Se u è armonica allora, per ogni $x \in \Omega$

$$\Delta u(x) = 0.$$

Quindi, per il teorema precedente si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Vale anche

$$\Delta(-u(x)) = 0$$

e quindi

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u(x)) \leq \max_{x \in \partial\Omega}(-u(x)).$$

Per ogni x appartenente a $\overline{\Omega}$ risulta

$$|u(x)| = \begin{cases} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x), & \text{se } u(x) \geq 0, \\ -u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega}(-u(x)), & \text{se } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Da cui segue

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max\left\{\max_{x \in \partial\Omega}(u(x)); \max_{x \in \partial\Omega}(-u(x))\right\} = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|.$$

Dimostrazione analoga per il minimo.

Questi teoremi hanno delle importanti conseguenze. Qui sotto riportiamo alcune di queste.

Teorema 3.3.4 *(Unicità di soluzione)*

Siano Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n , $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, allora il seguente problema di Dirichlet ammette una sola soluzione.

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.16)$$

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che ammetta due soluzioni u e v . Per la linearità del problema, la funzione $w = u - v$ risolve

$$\begin{cases} w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ \Delta w(x) = 0, & x \in \Omega \\ w(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Applichiamo il *Principio di Massimo* 3.3.3

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |w(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| = 0.$$

Quindi, per ogni $x \in \bar{\Omega}$, $w(x) = 0$ ovvero $u(x) = v(x)$.

Vale anche il seguente teorema di positività delle soluzioni.

Teorema 3.3.5 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Per ogni $f \in C^0(\bar{\Omega})$ tale che $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ risolve il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.18)$$

allora $u(x) \geq 0$, per ogni $x \in \Omega$.

Dimostrazione.

L'ipotesi $f(x) \leq 0$, per ogni $x \in \Omega$ implica che u è superarmonica quindi, per il *Principio di Minimo* 3.3.2, essa ammette minimo sul bordo dove vale zero, quindi u è non negativa su Ω .

Osservazione 3.3.1 *Il principio di massimo che abbiamo dimostrato per l'operatore di Laplace, con i risultati conseguenti, rimane valido anche per qualunque operatore uniformemente ellittico del secondo ordine.*

Invece il principio di massimo non è valido nel caso di operatori di ordine superiore. Infatti la funzione $u(x) = -\|x\|^2$ risolve $\Delta^2 u(x) = 0$, ammette massimo nell'origine, quindi non sul bordo se prendiamo aperti che lo contengono. Di conseguenza, in generale, non è detto che se f è positiva anche la soluzione del problema di Dirichlet con dati nulli al bordo abbia segno costante. Questo risultato resta valido solo per alcuni domini, vale infatti il seguente teorema.

Teorema 3.3.6 *Sia $u \in C^4(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ soluzione di*

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \nabla u(x) = u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

se Ω è una sfera o un disco (nel caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) e $f \geq 0$ allora $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Per approfondire questo argomento si può consultare la parte introduttiva di [5].

3.4 Ricerca di soluzioni con simmetria sferica

Definizione 3.4.1 *Siano Ω aperto di \mathbb{R}^n e sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. u si dice armonica su Ω se*

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Diamo un esempio di funzione armonica determinando le soluzioni di $\Delta u(x) = 0$ che abbiano “simmetria sferica”, ossia le funzioni che dipendano solo da r , distanza della variabile x da un fisato punto x_0 . Ossia $r(x) = \|x - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2}$ essendo $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$. A tale scopo calcoliamo le derivate seconde di u e le sostituiamo nell'equazione. Iniziamo con la derivata prima, tenendo conto della regola di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\frac{\partial u(r(x))}{\partial x_i} = u'(r) \frac{(x_i - \xi_i)}{\sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mentre le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 u(r(x))}{\partial x_i^2} = u''(r) \frac{(x_i - x_{0i})^2}{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} +$$

$$+ u'(r) \frac{[(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2] - [(x_i - \xi_i)^2]}{[(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2] \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sommando rispetto ad i da 1 ad n si ha che

$$\Delta u(r(x)) = u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r).$$

Le soluzioni $u = u(r)$ di $\Delta u = 0$ si ottengono risolvendo la seguente equazione differenziale ordinaria nella variabile $r > 0$

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0.$$

Questa equazione può essere risolta come segue. Posto $v(r) = u'(r)$ ci riconduciamo ad un'equazione differenziale del primo ordine

$$v'(r) + \frac{n-1}{r} v(r) = 0$$

che ha soluzioni del tipo

$$v(r) = \eta_0 e^{\int_{r_0}^r \frac{n-1}{t} dt} = \eta_0 e^{-(n-1) \log r} e^{(n-1) \log r_0} = C_0 \frac{1}{r^{n-1}}.$$

In definitiva possiamo scrivere le soluzioni dell'equazione di Laplace come segue:

$$u(r) = \begin{cases} C_0 r + C_1, & n = 1, \\ C_0 \log r + C_1, & n = 2, \\ \frac{C_0}{n-2} r^{2-n} + C_1, & n > 2. \end{cases}$$

Tra tutte le soluzioni ottenute la seguente si chiama **soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace**

$$U(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \|x-y\|, & n = 2, \\ -\frac{1}{n\omega_n(n-2)} \|x-y\|^{2-n}, & n > 2. \end{cases}$$

Dove ω_n è la misura della sfera n -dimensionale di raggio 1. Si verifica facilmente⁽⁵⁾ che la misura della sua superficie è: $\sigma_n = n\omega_n$.

Ovviamente $\Delta_x U(x-y) = 0$ per ogni $x \neq y$.

⁵Basta applicare il *teorema della divergenza* al campo vettoriale $X = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots, \frac{x_n}{n})$.

Ricordiamo il *teorema della divergenza*, per ogni campo vettoriale $w(x) = (w_1(x), \dots, w_n(x))$ di classe $C^1(\bar{\Omega})$ vale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_i w_i(x) dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n w_i \nu_i d\sigma = \int_{\partial\Omega} w \cdot \nu d\sigma,$$

dove $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ è il versore della normale esterna.

3.5 Un metodo elementare per la risoluzione dell'equazione di Laplace.

Consideriamo il seguente **Problema di Dirichlet**

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x, y) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = f(x) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

dove $(x, y) \in Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Cerchiamo una soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili, ovvero cerchiamo una soluzione non nulla del tipo

$$u(x, y) = X(x) Y(y), \quad (3.21)$$

che sostituita in (3.20) fornisce per ogni $(x, y) \in Q$:

$$X''(x) Y(y) + X(x) Y''(y) = 0, \text{ ovvero } \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (3.22)$$

L'ultima eguaglianza deve essere verificata per ogni $(x, y) \in Q$, cioè i rapporti devono essere costanti al variare di (x, y) :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ci siamo ricondotti a cercare una soluzione *non nulla* dei problemi seguenti relativi ad equazioni ordinarie del secondo ordine

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \\ X(x)Y(1) = f(x) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Prima di risolvere questi problemi determiniamo il segno del parametro λ . Dall'equazione di (3.23), moltiplicando per $X(x)$ si ha

$$X''(x) X(x) - \lambda X^2(x) = 0, \quad (3.25)$$

ovvero

$$\frac{d}{dx}[X'(x)X(x)] - [X'(x)]^2 - \lambda X^2(x) = 0, \quad (3.26)$$

integrando tra 0 e 1, tenuto conto delle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} X'(1)X(1) - X'(0)X(0) - \int_0^1 [X'(x)]^2 dx - \lambda \int_0^1 [X(x)]^2 dx &= \\ &= - \int_0^1 [X'(x)]^2 dx - \lambda \int_0^1 [X(x)]^2 dx = 0, \end{aligned}$$

da cui si deduce che deve essere $\lambda < 0$.

Torniamo ora ai problemi (3.23), (3.24) risolvendo le equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, mediante il metodo del polinomio caratteristico, e tenuto conto di (3.21) otteniamo⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} u(x, y) = X(x)Y(y) &= (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) (c_3 e^{\sqrt{-\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda}y}) = \\ &= (c_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}x) (c_3 e^{\sqrt{-\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda}y}). \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni al contorno per $X(x)$ si ha

$$\begin{cases} c_1 \cos \sqrt{-\lambda} + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} = 0 \\ c_1 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

e quindi

$$c_2 \sin \sqrt{-\lambda} = 0,$$

ovvero

$$\sqrt{-\lambda} = n\pi \iff \lambda = -n^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Quindi le soluzioni sono

$$X_n(x) = c_2 \sin n\pi x.$$

Per quanto riguarda il problema (3.24), dato che

$$Y(y) = c_3 e^{\sqrt{-\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda}y},$$

ponendo $Y(0) = 0$ si ha $c_3 + c_4 = 0$ e quindi

$$Y_n(y) = 2c_3 \left(\frac{e^{n\pi y} - e^{-n\pi y}}{2} \right) = 2c_3 \sinh n\pi y.$$

Consideriamo ora l'ultima condizione al bordo

$$u(x, 1) = X(x)Y(1) = f(x).$$

⁶Come é noto, le funzioni

$$e^{\sqrt{\lambda}x}, \quad e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

sono linearmente indipendenti, quindi é possibile dedurre, da loro combinazioni lineari opportune, due altre funzioni linearmente indipendenti, che sono quindi una base dello spazio da esse generato. In questo caso essendo l'equazione data a coefficienti reali possiamo dedurre una nuova base costituita da funzioni reali, ovvero

$$\cos \sqrt{-\lambda}x, \quad \sin \sqrt{-\lambda}x.$$

Infatti, essendo $\lambda < 0$ possiamo scrivere $\sqrt{\lambda} = i\sqrt{-\lambda}$ ed applicare la formula di Eulero dell'esponenziale complesso

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Da questa si ricava che

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Leonhard Euler (Basilea 1707 - Pietroburgo 1783). I suoi studi dettero contributi fondamentali in molti campi della matematica e della fisica. Impossibile dare in poco spazio un'idea delle sue importanti scoperte, basti pensare che la sua produzione si aggira intorno alle novecento opere raccolte in più di settanta volumi.

Se f è del tipo

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin n\pi x,$$

prendendo

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\sinh n\pi}$$

si ha che

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \sin n\pi x \sinh n\pi y$$

è la soluzione cercata.

Che succede se f non è del tipo visto sopra? La soluzione fu proposta da Fourier, affermando che ogni funzione può essere rappresentata come una serie infinita di funzioni trigonometriche (ad esempio di seni)⁽⁷⁾

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin n\pi x,$$

dove α_n si calcola come segue

$$\alpha_n = \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Quindi possiamo scrivere la soluzione del problema (3.20) come segue

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin n\pi x \sinh n\pi y \tag{3.27}$$

dove

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\sinh n\pi}$$

A questo punto è naturale porsi le seguenti domande:

- (1) dove converge la serie (3.27)?
- (2) u è derivabile 2 volte?
- (3) u soddisfa l'equazione del problema di Dirichlet?
- (4) u soddisfa le condizioni al bordo?
- (5) Il metodo seguito per determinare una soluzione è l'unico possibile?
- (6) La soluzione trovata è l'unica?

Iniziamo osservando che alla domanda (6) abbiamo già risposto con il Teorema 3.3.4. Mi sembra però utile illustrare un altro metodo per provare l'unicità di soluzione. Questo metodo ha il pregio di conservare la sua validità anche nel caso di problemi ellittici per i quali non è valido il principio di massimo, come ad esempio le equazioni di ordine superiore ed i sistemi.

Per assurdo, se esistessero due soluzioni del problema (3.20) allora la loro differenza risolverebbe il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta [u(x, y) - v(x, y)] = 0 \\ u(0, y) - v(0, y) = 0 \\ u(1, y) - v(1, y) = 0 \\ u(x, 0) - v(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) - v(x, 1) = 0 \end{array} \right. .$$

⁷Si osservi che le funzioni $\{\sin n\pi x\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono ortonormali su $[0, 1]$, ovvero $\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x \, dx = \delta_{nm}$, dove $\delta_{nm} = 0$ se $n \neq m$ e $\delta_{nm} = 1$ se $n = m$.

Moltiplicando l'equazione per $u - v$ e integrando su Q si ha

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2(u-v)}{\partial x^2} (u-v) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2(u-v)}{\partial y^2} (u-v) dx dy = 0,$$

da cui

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x} \right]^2 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial y} \right]^2 dx dy = 0,$$

ovvero $\text{grad}(u-v) = 0$ in Q , e quindi $u-v = \text{cost}$. Essendo $u-v = 0$ su ∂Q si ha che $u-v = 0$.

Una risposta a (1) è possibile darla se mettiamo qualche ipotesi supplementare su f ad esempio, se f come abbiamo posto è sviluppabile in serie di Fourier su $[0, 1]$, è sufficiente porre $f \in C^1([0, 1])$, allora, per la diseuguaglianza di Bessel⁽⁸⁾, si ha

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_n^2 < +\infty.$$

Posto $Q_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq y_0 < 1\}$, la serie (3.27) converge uniformemente su Q_1 . Infatti possiamo applicare il criterio della convergenza totale nel modo che segue:⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{Q_1} |A_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \sup_{Q_1} \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} = \\ & = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sup_{Q_1} \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sinh(n\pi y_0)}{\sinh(n\pi)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, \end{aligned}$$

⁸Ricordiamo che se $\{f_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione ortonormale nello spazio delle funzioni integrabili secondo Riemann in un dominio D , ovvero tali che $\int_D f_n(x) f_m(x) dx = \delta_{nm}$, e $\{\alpha_h\}_h$ sono i coefficienti di Fourier di una funzione f rispetto a questo sistema, cioè

$$f(x) = \sum_{h=0}^{+\infty} \alpha_h f_h(x), \quad \alpha_h = \int_D f(x) f_h(x) dx,$$

allora vale la diseuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \alpha_h^2 \leq \int_D f^2(x) dx.$$

Bernhard Riemann (Breselenz, Hannover 1826 - Selasca, Intra 1866). Insegnò all'università di Gottinga e produsse lavori fondamentali nei principali campi della matematica moderna.

Friedrich Wilhelm Bessel (Minden, Vestfalia 1784 - Königsberg 1846). Dette importanti contributi nell'astronomia ed insegnò all'università di Königsberg.

⁹Sia $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni reali definite su di un dominio D di \mathbb{R}^n . Diremo che la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **converge uniformemente** su D ad una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $x \in D$ e per ogni $k > k_0$ risulta $|f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x)| < \varepsilon$.

Diremo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **converge totalmente** su D se converge la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_D |f_k(x)|$.

Vale il seguente teorema: *Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge totalmente su D allora converge uniformemente su D .*

Sapere che una serie converge uniformemente è utile perché questo permette di derivare una serie derivando il suo termine generale, ossia:

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente su D ed il suo termine generale è derivabile allora, essa è derivabile e $D_i \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_i f_k(x)$, per $i = 1, \dots, n$.

¹⁰Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni tali che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < +\infty$, allora

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n| \leq (\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

perché applicando il criterio del rapporto⁽¹¹⁾ alla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sinh(n\pi y_0)}{\sinh(n\pi)} \right]^2$ ed essendo $0 < y_0 < 1$, risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{(n+1)\pi y_0} - e^{-(n+1)\pi y_0}}{e^{(n+1)\pi} - e^{-(n+1)\pi}} \right)^2 = e^{2\pi(1-y_0)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2(n+1)\pi y_0}}{e^{2(n+1)\pi}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\pi y_0}}{e^{2\pi}} = e^{2\pi(y_0-1)} < 1.$$

Quindi la serie converge uniformemente. Stabiliamo la convergenza uniforme della serie delle derivate prime. In modo da poter scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n n\pi \cos n\pi x \sinh n\pi y.$$

Ragionando come sopra

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{Q_1} |A_n n\pi \cos(n\pi x) \sinh(n\pi y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sup_Q n\pi \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \right)^2 =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{\sinh(n+1)\pi y_0}{\sinh(n+1)\pi} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 e^{2\pi(y_0-1)} < 1,$$

per $y_0 < 1$.

Analogo discorso per le altre derivate prime e seconde. Poiché la serie delle derivate converge totalmente e quindi uniformemente su Q_1 , se ne deduce che le derivate della serie coincidono con la serie delle derivate su Q_1 . Possiamo quindi calcolare su Q_1

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta [A_n \sin n\pi x \sinh(n\pi y)] = 0.$$

Resta da controllare se u verifica le condizioni al bordo. Ovviamente

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0,$$

in quanto la serie (3.27) converge uniformemente su Q_1 , ossia per $0 \leq y \leq y_0 < 1$, il problema è stabilire se converge uniformemente su Q per poter scrivere

$$u(x, 1) = f(x).$$

A tale scopo utilizziamo il seguente test di Abel⁽¹²⁾ della convergenza uniforme (vedi ad esempio [4]):

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y) b_n(y)$ converge uniformemente sul dominio D se sono verificate le condizioni

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)$ converge uniformemente su D ;
2. la successione di funzioni $\{b_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata su D ;

¹¹Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ allora la serie converge.

¹²Niels Henrik Abel (Findö 1802 - Froland 1829). Matematico norvegese, la sua opera è stata determinante per lo sviluppo della matematica moderna. Ricordiamo tra l'altro il teorema sulla non risolubilità mediante radicali delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto, ottenuto indipendentemente anche da Ruffini.

Paolo Ruffini (Valentano 1765 - Modena 1822). Insegnò clinica medica e matematica applicata all'università di Modena. Espose il suo teorema nel trattato *Teoria delle equazioni* (1790).

3. per ogni $y \in D$ la successione $\{b_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona.

Nella serie (3.27) prendiamo

$$a_n(y) = \alpha_n \sin n\pi x, \quad \text{costante in } y, \quad b_n(y) = \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh n\pi}$$

Risulta

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin n\pi x$ converge uniformemente per ogni $y \in [0, 1]$ (perchè è costante in y);
2. $\frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh n\pi} \leq 1$, per ogni $y \in [0, 1]$;
3. la successione $\left\{ \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh n\pi} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente per ogni valore di $y \in [0, 1]$, ovvero

$$\frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh n\pi} \geq \frac{\sinh(n+1)\pi y}{\sinh(n+1)\pi}.$$

Il punto 1 è ovvio per il test di Abel, mentre il punto 2 perché la funzione $t \rightarrow \sinh t$ monotona crescente. Dimostriamo 3 equivale a dimostrare che la funzione

$$g(t) = \frac{\sinh(t\pi y)}{\sinh t\pi}$$

è monotona non crescente in $[0, +\infty)$. Per dimostrare questo verifichiamo che per ogni $t \geq 0$ risulta $g'(t) \leq 0$. Infatti

$$g'(t) = \frac{\pi y \cosh t\pi y \sinh t\pi - \pi \sinh t\pi y \cosh t\pi}{(\sinh t\pi)^2} \leq 0,$$

e posto

$$h(t) = y \cosh t\pi y \sinh t\pi - \sinh t\pi y \cosh t\pi,$$

basta provare che per ogni $t \geq 0$ risulta $h(t) \leq 0$. Per questo osserviamo che $h(0) = 0$ inoltre $h'(t) < 0$, per ogni $t > 0$. Infatti

$$h'(t) = \pi[y^2 \sinh t\pi y \sinh t\pi - \sinh t\pi y \sinh t\pi] = \pi \sinh t\pi y \sinh t\pi [y^2 - 1] < 0,$$

per ogni $t > 0$ e $|y| < 1$.

Capitolo 4

Appendice

4.1 Integrali di Lebesgue

Per introdurre la nozione di integrale di Lebesgue⁽¹⁾ premettiamo alcune definizioni.

Definizione 4.1.1 Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è detto insieme (n -dimensionale) di **misura nulla** se può essere ricoperto mediante un sistema numerabile di cubi aperti (n -dimensionali) la cui somma dei volumi sia piccola a piacere, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sistema numerabile di cubi $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ con $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol } K_i < \varepsilon$.

Definizione 4.1.2 Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (²) e $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ un successione di funzioni, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f_k **converge q.o. a f** in Ω (converge quasi ovunque) se $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x)$ per ogni $x \in \Omega \setminus E$ dove $\text{mis}E = 0$.

Definizione 4.1.3 Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **misurabile** se essa è il limite quasi ovunque di una successione convergente di funzioni di classe $C^0(\overline{\Omega})$.

Esempio.

La successione di funzioni

$$f_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } \frac{1}{k} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ k & \text{se } x^2 + y^2 \leq \frac{1}{k} \end{cases}$$

è continua sul disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e converge q.o. alla funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Infatti l'unico insieme dove f_k non converge a f è il punto $(0, 0)$ che ha misura nulla. Quindi f è misurabile.

Consideriamo una successione di funzioni $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definita in Ω e non decrescente, se è q. o. limitata⁽³⁾ allora converge q.o. ad una funzione f (indichiamo con il simbolo $f_k \uparrow f$)

¹Henry-Léon Lebesgue (Beauvais, Oise 1875 - Parigi 1941). Professore all'università di Parigi, socio straniero dei Lincei (1925). Le sue ricerche sulla teoria della misura e dell'integrazione costituiscono un importante capitolo della moderna analisi matematica.

²In questo capitolo supponiamo che Ω sia un aperto di \mathbb{R}^n

³Ossia per q.o. $x \in \Omega$ la successione numerica $f_k(x)$ è limitata.

Indichiamo con $\mathcal{L}_1(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni che sono limite q.o. di successioni monotone non decrescenti di funzioni di $C^0(\overline{\Omega})$ tali che la successione degli integrali di Riemann sono limitati superiormente:

$$\mathcal{L}_1(\Omega) = \left\{ f : \text{esiste una successione } f_k \in C^0(\overline{\Omega}) : f_k \uparrow f \text{ e } \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_k(x) dx < +\infty \right\}.$$

Chiamiamo **integrale di Lebesgue** della funzione $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ il numero $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_k(x) dx$, ovvero

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sup_k \int_{\Omega} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx.$$

Si dimostrano i seguenti fatti:

- (a) L'integrale di Lebesgue f non dipende dalla scelta delle funzioni che convergono q.o. a f ;
- (b) se $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ e $f(x) \leq g(x)$ q.o. in Ω allora $\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx$;
- (c) se $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ allora per ogni $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $C_1 f + C_2 g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} [C_1 f(x) + C_2 g(x)] dx = C_1 \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} g(x) dx.$$

Definizione 4.1.4 Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile nel senso di Lebesgue** se esistono $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tale che $f = f_1 - f_2$, q.o. in Ω e l'**integrale di Lebesgue** di f è definito dall'eguaglianza

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f_1(x) dx - \int_{\Omega} f_2(x) dx.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni integrabili secondo Lebesgue in Ω . Si dimostra quanto segue.

- (a) L'integrale di Lebesgue f non dipende dalla scelta delle funzioni f_1 e f_2 ;
- (b) se $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ e $f(x) \leq g(x)$ q.o. in Ω allora $\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx$;
- (c) se $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ allora per ogni $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $C_1 f + C_2 g \in \mathcal{L}(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} [C_1 f(x) + C_2 g(x)] dx = C_1 \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} g(x) dx.$$

- (d) $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ se e solo se $|f| \in \mathcal{L}(\Omega)$ e vale

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

Si dimostra che se f è integrabile secondo Riemann allora f è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono. L'insieme delle funzioni intergabili secondo Lebesgue è dunque più ampio dell'insieme delle funzioni intergabili secondo Riemann, ad esempio la funzione di Dirichlet⁽⁴⁾ è limitata ed è integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann.

Si tenga poi presente che nella definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione non si è supposto la sua limitatezza. Ad esempio la funzione

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}} & \text{se } 0 < x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

non è limitata e $f \in \mathcal{L}(\{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\})$, se $\alpha < n$.

Nel corso di Analisi veniva generalizzato l'integrale di Riemann introducendo l'integrale improprio. Ricordiamo che la funzione $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in senso improprio (o generalizzato) in $(a, b]$ se

⁴È la funzione che vale 1 sui razionali e zero sugli irrazionali

(i) $f \in \mathcal{R}([c, b])$ per ogni $c \in (a, b)$;

(ii) esiste finito il limite $\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^a f(x) dx$,

in tal caso poniamo

$$\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Analoga definizione se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

La funzione $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é integrabile in senso improprio (o generalizzato) in $[a, +\infty)$ se

(i) $f \in \mathcal{R}([a, c])$ per ogni $c > a$;

(ii) esiste finito il limite $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$,

in tal caso poniamo

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Analoga definizione per $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dimostrano i seguenti fatti:

- (1) Se f é integrabile in senso improprio su $(a, b]$ allora é integrabile in secondo Lebesgue in $(a, b]$ e i due integrali coincidono.
- (2) Se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{R}([a, b])$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ allora f é integrabile in senso improprio su \mathbb{R} e gli integrali coincidono.
- (3) Se $|f|$ é integrabile in senso improprio su \mathbb{R} (quindi anche f lo é per il teorema sulla assoluta integrabilitá) allora $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ e gli integrali coincidono.

Osserviamo invece che se una funzione non é assolutamente integrabile in senso improprio ma solo integrabile, non é detto che sia integrabile secondo Lebesgue. Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

f é integrabile in senso improprio⁽⁵⁾ su \mathbb{R} mentre $|f|$ non lo é.⁽⁶⁾

⁵Basta integrare per parti ed applicare il criterio del confronto:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

L'integrale tende ad un valore finito per $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow +\infty$ perché il valore assoluto della funzione integranda si maggiora con $\frac{1}{x^2}$ che é integrabile in s.i. su $\mathbb{R} \setminus \{[-1, 1]\}$ avendo esponente maggiore di 1.

⁶Infatti, posto per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [(k-1)\pi, (k-\frac{3}{4})\pi] \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & [(k-\frac{3}{4})\pi, (k-\frac{1}{4})\pi] \\ 0 & [(k-\frac{1}{4})\pi, k\pi] \end{cases}$$

Vale

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\varphi_k(x)}{x} dx \geq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\varphi_k(x)}{k\pi} dx = \frac{\sqrt{2}}{4k}.$$

Da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Se fosse $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ anche $|f| \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ e quindi si avrebbe che $|f|$ è integrabile in senso improprio su \mathbb{R} per quanto osservato sopra al punto (2), dato che $|f|$ è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto in \mathbb{R} .

Un'altra sostanziale differenza tra le due definizioni è rappresentata dalla possibilità di passare al limite sotto il segno di integrale. Per dare un'idea citiamo come esempio il seguente *teorema di Lebesgue della convergenza dominata*.

Teorema 4.1.1 Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili convergente q.o. a f in Ω tali che $|f_k(x)| \leq g(x)$ q.o. in Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, con $g \in \mathcal{L}(\Omega)$. Allora $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Ricordiamo che il passaggio al limite sotto il segno di integrale si può fare in generale solo se la convergenza è uniforme.⁽⁷⁾

Nel cambiamento di variabili e nel calcolo degli integrali multipli l'integrale di Lebesgue si comporta come quello di Riemann. Valgono infatti i seguenti teoremi.

Teorema 4.1.2 Siano $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega_1$, biunivoca di classe $C^1(\Omega)$, con il determinante dello jacobiano, $\det \text{jac } \Phi$, diverso da zero. Allora $f \in \mathcal{L}(\Omega_1)$ se e solo se $f(\Phi(x))|\det \text{jac } \Phi(x)| \in \mathcal{L}(\Omega)$, inoltre

$$\int_{\Omega_1} f(y) dy = \int_{\Omega} f(x) |\det \text{jac } \Phi(x)| dx.$$

Teorema 4.1.3 (Teorema di Fubini-Tonelli)⁽⁸⁾ Sia $f \in \mathcal{L}(\Omega_n \times \Omega_m)$, con $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$. Allora per q.o. $x \in \Omega_n$ $f(x, y)$ è integrabile rispetto a $y \in \Omega_m$, per q.o. $y \in \Omega_m$ $f(x, y)$ è integrabile rispetto a $x \in \Omega_n$, le funzioni $y \rightarrow \int_{\Omega} f(x, y) dx$, $x \rightarrow \int_{\Omega} f(x, y) dy$ sono integrabili rispettivamente in Ω_m e Ω_n e

$$\int_{\Omega_n \times \Omega_m} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_n} dx \int_{\Omega_m} f(x, y) dy = \int_{\Omega_m} dy \int_{\Omega_n} f(x, y) dx.$$

Il seguente consente di apprezzare l'importanza dell'integrale di Lebesgue.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n^\alpha x^\alpha}{1 + n^2 x^2} dx, \quad 0 \leq \alpha < 2.$$

Se interpretiamo l'integrale considerato come integrale di Riemann, per poter poter portare il limite dentro il segno di integrale e quindi stabilire che il suo valore è zero, abbiamo bisogno che la successione di funzioni, converga anche uniformemente a zero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} \frac{n^\alpha x^\alpha}{1 + n^2 x^2} = 0.$$

⁷ f_k tende a f uniformemente su Ω se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_0$ e per ogni $x \in \Omega$ risulta $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

⁸ Guido Fubini (Venezia 1879 - New York 1943) Allievo di U. Dini e di L. Bianchi alla Scuola Normale Superiore di Pisa, insegnò all'università di Torino fino al 1938 e fu socio dell'Accademia dei Lincei fino a quella data. In seguito alle leggi razziali, emanate dal regime fascista, emigrò negli USA dove divenne membro dell'Istitute for Advance study di Princeton e poi professore all'università di New York. Dette contributi fondamentali in vari campi della matematica: dal calcolo integrale alla teoria dei gruppi ed alla geometria proiettiva. Si occupò anche di problemi di Ingegneria e di Fisica Matematica.

Luigi Bianchi (Parma 1856 - Pisa 1928). Allievo della Scuola Normale Superiore, dal 1881 professore della stessa e poi direttore. Socio nazionale dei Lincei e senatore. Tra i maggiori matematici italiani, i suoi studi riguardarono la geometria differenziale e la teoria dei numeri algebrici.

Ulisse Dini (Pisa 1845 - ivi 1918). Allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa, insegnò Analisi Matematica all'università di Pisa e fu direttore della SNS. Fu anche socio dei Lincei, deputato e senatore al parlamento. Dette notevoli contributi in vari campi della matematica, in particolare nell'Analisi Matematica.

Leonida Tonelli (Gallipoli 1885 - Pisa 1946) Insegnò in varie università italiane fino ad approdare alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Dette importanti contributi al Calcolo delle Variazioni, alla teoria delle funzioni ed alle equazioni differenziali ed integrali.

Ma questo non accade perché

$$\sup_{[0,1]} \frac{n^\alpha x^\alpha}{1+n^2 x^2} = \frac{n^\alpha (2-\alpha)^{\frac{2-\alpha}{2}} \alpha^{\frac{\alpha}{2}}}{2}.$$

Se invece applichiamo il *teorema della convergenza dominata di Lebesgue* visto sopra, abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n^\alpha x^\alpha}{1+n^2 x^2} dx = 0 \quad 0 \leq \alpha < 2.$$

Perché la successione di funzioni tende puntualmente a zero q.o. in $[0, 1]$ e tutte le funzioni della successione sono integrabili secondo Riemann su $[0, 1]$ e quindi anche secondo Lebesgue. Inoltre vale la maggiorazione

$$\int_0^1 \frac{n^\alpha x^\alpha}{1+n^2 x^2} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 2.$$

La funzione $g(x) = 1$ è la funzione che verifica l'ipotesi dell'enunciato.

4.2 Spazi di Banach e di Hilbert

Definizione 4.2.1 *Uno spazio vettoriale V si dice **normato** se su di esso è definita un'applicazione $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$,⁽⁹⁾ che associa ad ogni suo elemento un numero reale, con le seguenti proprietà:*

- (a) per ogni $v \in V$: $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$;
- (b) per ogni $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$: $\|cv\| = c\|v\|$;
- (c) per ogni $v, w \in V$: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definizione 4.2.2 *Una successione $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ si dice di **Cauchy** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h, k > k_0$ risulta $\|v_k - v_h\| < \varepsilon$*

Definizione 4.2.3 *Diremo che V è uno **spazio di Banach**⁽¹⁰⁾ se è normato e completo, ossia se ogni successione di Cauchy converge.*

Dire che la successione $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ **converge** a v equivale a dire che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|v_k - v\| = 0$ e scriveremo $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = v$.

Possiamo introdurre in uno spazio vettoriale H un prodotto scalare se possiamo definire un'applicazione $(\cdot, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni coppia di elementi di H associa un numero reale, che abbia le proprietà:

- (a) per ogni $h \in H$: $(h, h) \geq 0$ e $(h, h) = 0$ se e solo se $h = 0$;
- (b) per ogni $h_1, h_2 \in H$: $(h_1, h_2) = (h_2, h_1)$;
- (c) per ogni $c \in H$ e $h_1, h_2 \in H$: $(ch_1, h_2) = c(h_1, h_2)$;
- (d) per ogni $h_1, h_2, h_3 \in H$: $(h_1 + h_2, h_3) = (h_1, h_3) + (h_2, h_3)$;

Il prodotto scalare genera in H la norma $\|h\|_H = \sqrt{(h, h)}$. Si dimostra la seguente disuguaglianza di Schwartz, che generalizza negli spazi di dimensione infinita l'analoga vista negli spazi di dimensione finita:

$$|(h_1, h_2)| \leq \|h_1\|_H \|h_2\|_H.$$

⁹Scriveremo semplicemente $\|\cdot\|$ anziché $\|\cdot\|_V$ se non c'è pericolo di confusione.

¹⁰Stefan Banach (Cracovia 1892 - Leopoli 1945) insegnò all'università di Leopoli. Partecipò alla resistenza contro l'occupazione tedesca della Polonia e fu vittima della persecuzione nazista. È uno dei fondatori della moderna Analisi Funzionale.

Definizione 4.2.4 Diremo che H è uno spazio di Hilbert⁽¹¹⁾ se è completo con la norma generata dal suo prodotto scalare.

Si dimostra facilmente che un'applicazione lineare definita in uno spazio di Banach (basta anche che sia normato) è continua in tutto lo spazio se e solo se è continua in zero. Inoltre si dimostra che $L : B_1 \rightarrow B_2$ (B_1, B_2 spazi normati) è continua in B_1 se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $v \in B_1$ risulta

$$\|Lv\|_{B_2} \leq M\|v\|_{B_1}.$$

Di conseguenza, in particolare, fissato $h_0 \in H$ il prodotto scalare nello spazio H fornisce la seguente applicazione continua

$$S(v) = (v_0, v), \quad \forall v \in H.$$

basta applicare la disuguaglianza di Schwartz tenendo presente che in \mathbb{R} possiamo assumere il modulo $|\cdot|$ come norma:

$$|S(v)| = |(v_0, v)| \leq \|v_0\|_H \|v\|_H = M\|v\|_H.$$

Negli spazi di Hilbert è possibile stabilire un legame tra il prodotto scalare e le applicazioni dello spazio sui reali come si vede dal seguente teorema.

Teorema 4.2.1 (Teorema di F. Riesz)⁽¹²⁾ Per ogni applicazione lineare e continua L di uno spazio di Hilbert H in \mathbb{R} esiste un elemento h_0 appartenente ad H tale che

$$L(h) = (h_0, h), \quad \forall h \in H.$$

Esempi di spazi di Banach e di Hilbert

Esempio 1

Lo spazio \mathbb{R}^n con il prodotto scalare

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = x \cdot y$$

è uno spazio di Hilbert.

Esempio 2

Indichiamo con $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ il sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(\Omega)$ delle funzioni tali che

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$$

Si dimostra che $\left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$ è una norma in $L^p(\Omega)$ e che questi spazi sono di Banach.

Se $p = 2$ possiamo definire il seguente prodotto scalare su $L^2(\Omega)$

$$(f, g)_2 = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Vale anche per questo prodotto scalare la disuguaglianza di Schwartz che assume la forma

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx}$$

¹¹David Hilbert (Königsberg 1862 - Göttinga 1943). È uno dei matematici più importanti del novecento. Insegnò a Göttinga. Dette importanti contributi in vari campi della matematica. Questa universalità di interessi è confermata dal celebre elenco dei 23 problemi fondamentali riguardanti tutta la matematica e presentati al congresso mondiale dei matematici di Parigi nel 1900.

¹²Frigyes Riesz (Győr 1880 - Budapest 1956). Insegnò in varie università ungheresi. Dette importanti contributi alla teoria degli spazi vettoriali topologici ed all'Analisi Funzionale.

Si dimostra che $L^2(\Omega)$ con questo prodotto scalare è uno spazio di Hilbert.
 Una conseguenza di quanto visto sopra è la seguente osservazione.
 Siano Ω aperto di \mathbb{R}^n , e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in L^2(\Omega)$.
 L'applicazione

$$L : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita da } L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

è lineare e continua su $L^2(\Omega)$.

4.3 Forme bilineari

Definizione 4.3.1 Sia V spazio vettoriale. Un forma bilineare a è un'applicazione di $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ che ha le seguenti proprietà

1) per ogni $u_1, u_2, v \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ risulta $a(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + \mu a(u_2, v)$;

2) per ogni $v_1, v_2, u \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ risulta $a(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda a(u, v_1) + \mu a(u, v_2)$.

a si dice *simmetrica* se per ogni $u, v \in V$: $a(u, v) = a(v, u)$.

Definizione 4.3.2 Un forma bilineare su uno spazio vettoriale normato V si dice *coercitiva* se esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $v \in V$ si ha che $a(u, u) \geq \nu \|u\|^2$

Si vede facilmente che un forma bilineare, simmetrica, coercitiva e limitata⁽¹³⁾ sullo spazio normato V definisce un prodotto scalare su V : $(u, v)_V = a(u, v)$.

Si osservi che in particolare è verificata la proprietà (a) del prodotto scalare perché $a(u, u) = 0$ implica per la coercività $\|u\| = 0$ e quindi $u = 0$.

Esempio.

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 5 \end{pmatrix}$$

A è simmetrica e i suoi autovalori sono positivi: $\lambda_1 = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$. Possiamo associare ad A la seguente forma bilineare definita su \mathbb{R}^2

$$a(u, v) = (Au, v)_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

Questa verifica

$$a(u, u) \geq \frac{9 - \sqrt{5}}{2} \|u\|_{\mathbb{R}^2}^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2.$$

Un utile corollario del teorema di F. Riesz è il seguente

Teorema 4.3.1 (Teorema di F. Riesz) Siano L un'applicazione lineare e continua di uno spazio di Hilbert H in \mathbb{R} , ed a un forma bilineare e continua su H simmetrica, coercitiva e limitata. Allora esiste un elemento $h_0 \in H$ tale che

$$a(h_0, h) = L(h), \quad \forall h \in H.$$

¹³Cioè, se esiste $C > 0$ tale che per ogni $u, v \in V$ si abbia $|a(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$.

4.4 Spazi di Sobolev

Derivate generalizzate o nel senso delle distribuzioni.

Siano Ω aperto di \mathbb{R}^n con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 , $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Per le formule di Gauss-Green, per ogni funzione $g \in C^1(\overline{\Omega})$ che si annulla su $\partial\Omega$, (nel seguito indicheremo questo spazio con $C_0^1(\overline{\Omega})$) possiamo scrivere

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si osservi che la derivata $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é in questo modo completamente individuata. Infatti se esistesse un'altra funzione h_i verificante l'eguaglianza sopra, ossia

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} h_i(x) g(x) dx,$$

si dovrebbe avere, per ogni $g \in C_0^1(\overline{\Omega})$ ⁽¹⁴⁾

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - h_i(x) \right] g(x) dx = 0.$$

da cui $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = h_i(x)$.

Esempio.

La funzione $f(x) = |x|$ è derivabile in senso debole su $[-1, 1]$ e la sua derivata è $f'(x) = \text{sgn } x$. Infatti, per ogni funzione $g \in C_0^1([-1, 1])$:

$$\int_{-1}^1 |x| \frac{d}{dx} g(x) dx = \int_{-1}^0 (-x) \frac{d}{dx} g(x) dx + \int_0^1 x \frac{d}{dx} g(x) dx =$$

(integrando per parti)

$$= [(-x)g(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 g(x) dx + [xg(x)]_0^1 - \int_0^1 g(x) dx = - \int_{-1}^1 \text{sgn } x g(x) dx.$$

Definizione 4.4.1 Diremo che la funzione $h_i \in L^2(\Omega)$ è la **derivata debole** rispetto alla variabile i , $i = 1, \dots, n$ di $f \in L^2(\Omega)$ se per ogni $g \in C_0^1(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} f(x) D_i g(x) dx = \int_{\Omega} h_i g(x) dx.$$

Indichiamo con $W^{1,2}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni che hanno la derivata debole in $L^2(\Omega)$.

Si dimostra che questo è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\int_{\Omega} \phi(x) \psi(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_i \phi(x) D_i \psi(x) dx.$$

¹⁴Segue dal lemma

Lemma 4.4.1 Sia $F \in C^0(\Omega)$ per ogni $g \in C_0^0(\Omega)$

$$\int_{\Omega} F(x) g(x) dx = 0$$

allora $F = 0$ su Ω .

Infatti per assurdo se esistesse un $x_0 \in \Omega$ tale che $F(x_0) > 0$, esisterebbe un intorno $U(x_0)$ dove $F(x) > 0$. Prendendo $g > 0$ su $U(x_0)$ e zero fuori di $U(x_0)$ si avrebbe l'assurdo:

$$0 < \int_{U(x_0)} F(x) g(x) dx = \int_{\Omega} F(x) g(x) dx = 0.$$

4.5 Un teorema di esistenza di soluzioni deboli di equazioni ellittiche.

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u(x) = \sum_{i=1}^n D_i f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dove $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ è una matrice simmetrica, ellittica con coefficienti misurabili e limitati. Se $f_i \in L^2(\Omega)$ per $i = 1, \dots, n$, allora il problema ammette una ed una sola soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ ⁽¹⁵⁾. Basta infatti applicare il teorema di F. Riesz prendendo

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u(x) D_j v \, dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_i D_i v \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

a è simmetrica e coercitiva infatti se λ_m è il più piccolo degli autovalori della matrice allora vale la maggiorazione

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u(x) D_j u \, dx \geq \lambda_m \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \|D_i u(x)\|^2 \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Da questa si deduce che se $a(u, u) = 0$ allora $\nabla u = 0$ quindi u è costante su Ω e poiché è nulla al bordo allora risulta $u = 0$.

Per ottenere una soluzione classica del problema di Dirichlet considerato si utilizzano i risultati della *teoria della regolarità ellittica*. In sostanza questa teoria permette di stabilire che dati regolari forniscono soluzioni regolari. Ad esempio se $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, allora $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

¹⁵ $H_0^1(\Omega)$ è il sottospazio delle funzioni di $H^1(\Omega)$ che si annullano su $\partial\Omega$.

Capitolo 5

Bibliografia

5.1 Commento bibliografico

Nella quantità sterminata di libri che trattano di equazioni alle derivate parziali, per un primo approfondimento delle questioni trattate in queste lezioni, posso suggerire il testo di Renardy, Rogers [11]. I primi capitoli non richiedono la conoscenza di integrali di Lebesgue e spazi di Hilbert.

Un ulteriore passo in avanti nella conoscenza può essere fatto leggendo il libro Michajlov [8]. In questo libro è esposta in maniera chiara ed esauriente la teoria di base delle equazioni alle derivate parziali utilizzando anche le nozioni di integrale di Lebesgue, di spazi di Banach, di Hilbert, di Sobolev ed alcuni concetti di base dell'analisi funzionale.

Per chi volesse approfondire ulteriormente lo studio delle equazioni ellittiche, consiglio l'ormai classico testo di Gilbarg, Trudinger [7]. I capitoli iniziali si possono leggere con una conoscenza di matematica di tipo standard e permettono di conoscere le proprietà fondamentali delle soluzioni.

Per quanto riguarda l'Analisi Funzionale, esistono numerosissimi testi sull'argomento. Voglio segnalarne due: quello di Miranda [9] e quello di Brezis [1].

Per quanto riguarda gli integrali di Lebesgue si può vedere anche il libro del Giusti [6] che viene usato nei corsi di base di Analisi Matematica 2.

Ottimi libri sono anche Salsa [12] ed il classico Weienberger [14].

Per la parte introduttiva in cui ho fatto riferimento alla fisica matematica ho consultato Egorov, Shubin[3], Persico [10] e Villaggio [13].

Il collasso del ponte di Tacoma, che ho citato parlando nella parte riguardante i modelli fisico matematici, è stato ed è studiato in numerose pubblicazioni. Qui mi limito ad indicare uno dei video in cui si può vedere lo spettacolare evento, ossia [15].

I brevi cenni biografici che messo in queste dispense sono tratti da [2].

Per approfondire alcune questioni riguardanti le equazioni ellittiche di ordine superiore si veda Gazzola, Grunau, Sweers [5].

Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Analisi Funzionale. Teoria ed applicazioni*, Liguori Editore, Napoli, 1986.
- [2] *Enciclopedia Biografica Universale*, Biblioteca Treccani, Milano, 2007.
- [3] Yu. V. Egorov, M. A. Shubin, *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] E. Fischer, *Intermediate Real Analysis*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [5] F. Gazzola, H.G. Grunau, G. Sweers, *Polyarmonic Boundary Value Problems*, Lectures Notes in Mathematics, 1991, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [6] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003.
- [7] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [8] V. P. Michajlov, *Equazioni alle derivate parziali*, Edizioni MIR, Mosca, 1984.
- [9] C. Miranda, *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, Unione Matematica Italiana, 1978.
- [10] E. Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica*, terza edizione riveduta e corretta, Zanichelli, Bologna, 1965.
- [11] M. Renardy, R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [12] S. Salsa, *Equazioni alle derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, Springer, Milano, 2010.
- [13] P. Villaggio, *Qualitative methods in elasticity*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.
- [14] H. F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*, Blaisdel Publishing Company, New York, 1965.
- [15] Tacoma Narrows Bridge collapse, <http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs> (1940).