ANALISI MATEMATICA I-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 28/1/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 6)

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} - w^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, i \\[2ex] z^2\, \overline{w}^{\,2} = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{\sqrt{3}}{16}\, i. \end{cases}$$

Esercizio 2. (Punti 6)

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \beta, \\[1ex] a_{n+1} = \sqrt{2\, a_n + 32} - 4\,, \end{cases}$$

studiarne l'andamento e calcolare l'eventuale limite al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (Punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{\sqrt{1+3x^2}} - e^{\sqrt{1+2x^2}} + x^4}{\left[\log(1+5x) - \sin 3\,x\right]^2 + x^5}.$$

Esercizio 4. (Punti 6)

Determinare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} - \sin n^x}{\log(1 + n^x) + e^{nx}}.$$

Esercizio 5. (Punti 6)

Si consideri l'equazione:

$$\frac{1}{2} + \sqrt[n]{x} = x^n,$$

(a) dimostrare che per ogni $n \geq 2$ ammette soluzione $x_n > 0$.

(b) dimostrare l'unicità della soluzione (senza utilizzare le derivate);

(c) calcolare il valore del limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. (Punti 6)

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} - w^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, i \\ \\ z^2\, \overline{w}^{\,2} = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{\sqrt{3}}{16}\, i. \end{cases}$$

Svolgimento.
Dalla prima equazione del sistema ricaviamo

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \overline{z}^{\,2} \iff \overline{w}^{\,2} = \overline{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \overline{z}^{\,2}} \iff \overline{w}^{\,2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} i + z^2$$

Sostituiamo nella seconda equazione del sistema

$$z^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} i + z^2 \right) = -\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16} i \iff z^4 + z^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} i \right) + \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16} i = 0.$$

Poniamo $u = z^2$ ed applichiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ottenendo

$$u_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} i \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4} i - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} i \pm \sqrt{-\frac{3}{16}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} i \pm \frac{\sqrt{3}}{4} i}{2}$$

Quindi

$$u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

Tenuto conto delle posizioni fatte sopra, da u_1 otteniamo:

$$z_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

e quindi

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

Passando alla forma trigonometrica

$$-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right)$$

Le sue radici quadrate sono

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

e

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Un primo insieme di coppie di soluzioni sono:

$$(z_1, w_1),\ \ (z_1, w_2),\ \ (z_2, w_1),\ \ (z_2, w_2).$$

Esprimiamo u_2 in forma trigonometrica per poter calcolare le sue radici quadrate:

$$u_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\, i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\right).$$

Le radici quadrate di questo numero forniscono $z_{3,4}$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),\ \ z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

Tornando alla prima equazione del sistema

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\, i + \overline{z}^{\,2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\, i + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\, i = -\frac{1}{4}$$

da cui

$$w_{3,4} = \pm\frac{1}{2}\, i.$$

Le altre coppie di soluzioni sono

$$(z_3, w_3),\ \ (z_3, w_4),\ \ (z_4, w_3),\ \ (z_4, w_4).$$

Esercizio 2. (Punti 6)

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = & \beta, \\ \\ a_{n+1} & = & \sqrt{2\, a_n + 32} - 4, \end{cases}$$

studiarne l'andamento e calcolare l'eventuale limite al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.
Determiniamo per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la successione è ben definita iniziando col risolvere la disequazione $2\,\beta + 32 \geq 0$ e quindi $\beta \geq -16$. Inoltre osserviamo che per questi valori del parametro β risulta $a_1 > -16$ perché $\sqrt{2\beta + 32} - 4 > -16$ in quanto $\sqrt{2\beta + 32} > -12$. Analogamente segue che se $a_n > -16$ allora $a_{n+1} > -16$.
Studiamo la monotonia, procedendo per induzione ed osservando che $a_1 > a_0$ perché

$$a_1 = \sqrt{2\,\beta + 32} - 4 > \beta = a_0 \iff \sqrt{2\,\beta + 32} > \beta + 4$$

Risolvere questa disequazione equivale a risolvere i sistemi

$$\begin{cases} \beta & \geq & -16 \\ \\ \beta + 4 & \geq & 0 \\ \\ \beta^2 + 6\,\beta - 16 & < & 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \beta & \geq & -16 \\ \\ \beta + 4 & \leq & 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono i valori del parametro $-16 \leq \beta < 2$.
Inoltre se $a_n < a_{n+1}$ segue $a_{n+1} < a_{n+2}$ perché

$$a_{n+1} = \sqrt{2\, a_n + 32} - 4 < \sqrt{2\, a_{n+1} + 32} - 4 = a_{n+2} \iff \sqrt{2\, a_n + 32} < \sqrt{2\, a_{n+1} + 32},$$

ovvero

$$2\,a_n\,+\,32 < 2\,a_{n+1}\,+\,32 \iff a_n < a_{n+1}.$$

La successione risulta crescente per i valori di $-16 \leq \beta < 2$.
Per questi valori risulta anche limitata superiormente.
Infatti ragionando ancora per induzione: $a_n < 2$ implica $a_{n+1} < 2$, perché

$$a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n\,+\,32}\,-\,4 < 2 \iff \sqrt{2\,a_n\,+\,32} < 6 \iff a_n < 2.$$

Quindi per il teorema di regolarità delle successioni monotone: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \,=\, l \in \mathbb{R}$.
Analogamente per determinare per quali valori del parametro la successione è decrescente dobbiamo risolvere

$$a_1 \,=\, \sqrt{2\,\beta\,+\,32}\,-\,4 \,<\, \beta \,=\, a_0 \iff \sqrt{2\,\beta\,+\,32} \,<\, \beta\,+\,4$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \beta & \geq & -16 \\ \beta + 4 & > & 0 \\ \beta^2\,+\,6\,\beta\,-\,16 & > & 0 \end{cases}$$

Che ha soluzioni $\beta > 2$.
Si completa il ragionamento per induzione osservando, nello stesso modo fatto sopra che se $a_n > a_{n+1}$ allora $a_{n+1} > a_{n+2}$. La successione decresce per $\beta > 2$. La limitatezza inferiore della successione segue da quanto visto all'inizio, cioé che $a_n > -16$. Quindi anche per $\beta > 2$ esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \,=\, l \in \mathbb{R}$.
Se $\beta = 2$, banalmente otteniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2$. In questo caso il suo limite è 2.
Per determinare il valore di l nel caso $\beta \neq 2$ passiamo al limite nella definizione ricorsiva della succesisone ottenendo l'equazione

$$l \,=\, \sqrt{2\,l\,+\,32}\,-\,4 \iff l + 4 \,=\, \sqrt{2\,\beta\,+\,32}.$$

Per risolverla ci riconduciamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} l & \geq & -16 \\ l + 4 & \geq & 0 \\ l^2\,+\,6\,l\,-\,16 & = & 0, \end{cases}$$

Che ha come unica soluzione $l = 2$, che risulta essere, in virtú delle osservazioni fatte sopra il valore del limite della successione per ogni $\beta \geq -16$.

Esercizio 3. (Punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sqrt{1+3x^2}}\,-\,e^{\sqrt{1+2x^2}}\,+\,x^4}{[\log(1+5x)\,-\,\sin 3x]^2\,+\,x^5}.$$

Svolgimento.
Consideriamo gli sviluppi delle funzioni che compaiono al numeratore, in particolare degli argomenti delle due funzioni esponenziali:

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{3}{2}\,x^2\,+\,o(x^2), \quad \sqrt{1+2x^2} = 1 +\,x^2\,+\,o(x^2),$$

che sostituiti forniscono

$$e^{\sqrt{1+3x^2}} \; - \; e^{\sqrt{1+2x^2}} \; = \; e \; \left(e^{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} \; - \; e^{x^2+o(x^2)} \right) \; =$$

$$= \; e \; \left[1 + \frac{3}{2}\, x^2 \; + \; o(x^2) \; + \; o(\frac{3}{2} x^2 + o(x^2)) - \; 1 - \; x^2 \; + \; o(x^2 + o(x^2)) \right] \; = \; \frac{e}{2}\, x^2 \; + \; o(x^2)$$

Qui sopra abbiamo utilizzato lo sviluppo $e^y = 1 + y + o(y)$ ponendo nei due casi $y = \frac{3}{2}\, x^2 + o(x^2)$, $y = x^2 + o(x^2)$ ed osservando che $o(\frac{3}{2}\, x^2 + o(x^2)) = o(x^2)$, $o(x^2 + o(x^2)) = o(x^2)$.
Al denominatore si ha invece:

$$\log(1 \, + \, 5x) \; = \; 5x \; + \; o(x), \qquad \sin 3x \; = \; 3\, x \; + \; o(x).$$

$$[\log(1 \, + \, 5x) \; - \; \sin 3x]^2 \; = \; [5\, x \; + \; o(x) \; - \; 3x \; + \; o(x)]^2 = 4x^2 + o(x^2)$$

Perché

$$o(x) + o(x) = o(x), \quad [o(x)]^2 = o(x^2), \quad 4x\, o(x) \; = \; o(x^2), \quad o(x^2) + o(x^2) = o(x^2).$$

Sostituendo

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{\sqrt{1+3x^2}} \; - \; e^{\sqrt{1+2x^2}} \; + \; x^4}{[\log(1+5x) \; - \; \sin 3\, x]^2 \; + \; x^5} \; = \; \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{e}{2}\, x^2 \; + \; o(x^2) \; + \; x^4}{4\, x^2 \; + \; o(x^2) \; + \; x^5} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{e}{2}\, x^2 \; + \; o(x^2)}{4\, x^2 \; + \; o(x^2)}.$$

Perché $x^4 + o(x^2) = o(x^2)$ e $x^5 + o(x^2) = o(x^2)$. Infine applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{e}{2}\, x^2 \; + \; o(x^2)}{4\, x^2 \; + \; o(x^2)} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{e}{2}\, x^2}{4\, x^2} \; = \; \frac{e}{8}.$$

Esercizio 4. (Punti 6)

Determinare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \; - \; \sin n^x}{\log(1 + n^x) \; + \; e^{nx}}.$$

Svolgimento.
Ricordando che

$$\lim_{x \to +\infty} \; n^x \; = \; \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x > 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} ,$$

distinguiamo i tre casi. Se $x = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \; - \; \sin 1}{\log 2 \; + \; 1} \; = \; - \frac{\sin 1}{\log 2 \; + \; 1}.$$

Se $x > 0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \; \log(1 + n^x) \; + \; e^{nx} \; = \; +\infty$$

Il numeratore non ha invece limite, ma è limitato, quindi moltiplicandolo per una successione infinitesima otteniamo una successione che tende a zero ([1]) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \; - \; \sin n^x}{\log(1 + n^x) \; + \; e^{nx}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^n} \; - \; \sin n^x \right) \frac{1}{\log(1 + n^x) \; + \; e^{nx}} = 0$$

[1]Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata e $\lim_{n \to +\infty} b_n \; = \; 0$, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n \; b_n \; = \; 0$.

Sia ora $x < 0$. Ricordando che $x < 0$ equivale a dire $x = -|x|$, possiamo scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \;-\; \sin n^x}{\log(1+n^x) \;+\; e^{nx}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \;-\; \sin \dfrac{1}{n^{|x|}}}{\log\left(1+\dfrac{1}{n^{|x|}}\right) \;+\; \dfrac{1}{e^{n|x|}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \;-\; \dfrac{1}{n^{|x|}} + o\left(\dfrac{1}{n^{|x|}}\right)}{\dfrac{1}{n^{|x|}} \;+\; o\left(\dfrac{1}{n^{|x|}}\right) \;+\; \dfrac{1}{e^{n|x|}}}.$$

Sopra abbiamo utilizzato gli sviluppi delle funzioni $\log(1+y)$ e $\sin y$ con $y = \frac{1}{n^{|x|}}$. Osserviamo inoltre che per ogni $x \neq 0$ e per n che tende a $+\infty$ si ha

$$\frac{1}{n^n} \;=\; o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right), \quad \frac{1}{e^{n|x|}} \;=\; o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right),$$

e quindi

$$\frac{1}{n^n} \;+\; o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right), \quad \frac{1}{e^{n|x|}} \;+\; o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right) \;=\; o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right).$$

In definitiva otteniamo mediante il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^n} \;-\; \dfrac{1}{n^{|x|}} + o\left(\dfrac{1}{n^{|x|}}\right)}{\dfrac{1}{n^{|x|}} \;+\; o\left(\dfrac{1}{n^{|x|}}\right) \;+\; \dfrac{1}{e^{n|x|}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\;\dfrac{1}{n^{|x|}} + o\left(\dfrac{1}{n^{|x|}}\right)}{\dfrac{1}{n^{|x|}} \;+\; o\left(\dfrac{1}{n^{|x|}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\;\dfrac{1}{n^{|x|}}}{\dfrac{1}{n^{|x|}}} \;=\; -\,1.$$

Esercizio 5. (Punti 6)

Si consideri l'equazione:

$$\frac{1}{2} \;+\; \sqrt[n]{x} \;=\; x^n,$$

(a) dimostrare che per ogni $n \geq 2$ ammette soluzione $x_n > 0$.

(b) dimostrare l'unicità della soluzione (senza utilizzare le derivate);

(c) calcolare il valore del limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \; x_n$.

Svolgimento.
(a) L'equazione data equivale alla seguente

$$x^n \;-\; \frac{1}{2} \;-\; \sqrt[n]{x} = \;0.$$

Risolvere è equivalente a determinare gli zeri della funzione:

$$f_n(x) = x^n \;-\; \frac{1}{2} \;-\; \sqrt[n]{x}.$$

Osserviamo che f_n risulta continua perché differenza di funzioni continue. Inoltre se $n \geq 2$

$$f_n(1) = \;-\frac{1}{2} < 0 \;, \;\; f_n(2) = 2^n - \frac{1}{2} - \sqrt[n]{2} > 0.$$

Quindi per il teorema degli zeri $f_n(x) = 0$ ammette una radice nell'intervallo $(1, 2)$. Si osservi che l'ultima diseguaglianza segue da:

$$2^n \;>\; 2 \;>\; \frac{1}{2} \;+\; \sqrt[n]{2}, \;\; \forall n \geq 2.$$

da cui, sempre per ogni $n \geq 2$,

$$3^n > 2^{n+1},$$

che si verifica facilmente per induzione. ([2])

(b) L'unicità segue ragionando per assurdo. Se esistessero due soluzioni distinte $a, b > 1$ si avrebbe

$$a^n - \frac{1}{2} - \sqrt[n]{a} = 0, \quad \text{e} \quad b^n - \frac{1}{2} - \sqrt[n]{b} = 0,$$

onde

$$a^n - \frac{1}{2} - \sqrt[n]{a} = b^n - \frac{1}{2} - \sqrt[n]{b} \iff a^n - b^n = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}.$$

Al primo membro scomponiamo

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}.$$

ovvero

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})[(\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}b + \cdots + (\sqrt[n]{b})^{n-2}a + (\sqrt[n]{b})^{n-1}](a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}.$$

e quindi

$$[(\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}b + \cdots + (\sqrt[n]{b})^{n-2}a + (\sqrt[n]{b})^{n-1}](a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = 1$$

Assurdo perché il primo membro è somma di termini maggiori di 1.
Invece per valori di $0 < x < 1$ si ha $f_n(x) < 0$ perché risulta per ogni $x \in (0,1)$ ed $n \geq 2 : x^n < x < \sqrt[n]{x}$, da cui

$$x^n < x < \sqrt[n]{x} < \frac{1}{2} + \sqrt[n]{x}.$$

(c) Dall'equazione ricaviamo:

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \sqrt[n]{x_n}}$$

Tenuto conto che $x_n \in (1,2)$, al secondo membro il termine sotto radice viene limitato nel modo seguente:

$$\frac{3}{2} < \frac{1}{2} + \sqrt[n]{x_n} < \frac{1}{2} + \sqrt[n]{2} < \frac{1}{2} + 2$$

da cui

$$\sqrt[n]{\frac{3}{2}} <, \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \sqrt[n]{x_n}} < \sqrt[n]{\frac{5}{2}}.$$

e quindi, essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{2}} = 1$, in definitiva, per il teorema dei carabinieri, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

[2] Per n=2 è ovvia. Posto $\mathcal{P}(n):\ 3^n > 2^{n+1}$ si ha che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) : 3^{n+1} = 3^n 3 > 2^{n+1}3 > 2^{n+1}2 = 2^{n+2}$.