ANALISI MATEMATICA I+II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 30/6/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 7)

Si considerino i numeri complessi della forma

$$z_n = w^n + i\,\overline{w}^{\,n},$$

dimostrare che, posto $\rho = |w|$, si ha

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq 2\,\rho^n$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg\ z_n = \dfrac{\pi}{4}$ oppure $arg\ z_n = \dfrac{5}{4}\pi$.

ESERCIZIO 2 (Punti 7)

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

dimostrare che è periodica e determinarne il periodo; trovare il campo di esistenza, i punti (se esistono) di massimo o di minimo relativo, gli intervalli di monotonia, di concavità o convessità, eventuali flessi, punti angolosi o cuspidi. Tracciarne un grafico approssimato.

ESERCIZIO 3 (Punti 7)

Risolvere il seguente problema di Cauchy e tracciare un grafico approssimato della soluzione

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}\; u^2(t), \\[2ex] u(1) = \sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{27}}}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4. (Punti 7)

Stabilire al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza del limite della successione ed eventualmente calcolarlo.

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\[1ex] a_{n+1} = \sqrt{10\,a_n} - \sqrt{a_n} \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. (Punti 5) Utilizzando la formula di Taylor calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{x^2} - \cos(x\sqrt{2\,|\log x|})}{\sin(x\,\log x) - \log[1 + x\,\log x]}.$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (Punti 7)

Si considerino i numeri complessi della forma

$$z_n = w^n + i\,\overline{w}^{\,n},$$

dimostrare che, posto $\rho = |w|$, si ha

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \le 2\,\rho^n$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg\ z_n = \dfrac{\pi}{4}$, oppure $arg\ z_n = \dfrac{5}{4}\,\pi$.

Svolgimento.
(a) Applichiamo la diseguaglianza triangolare:

$$|z_n| = |w^n + i\,\overline{w}^{\,n}| \le |w^n| + |i\,\overline{w}^{\,n}| = |w^n| + |i|\,|\overline{w}^n| = |w^n| + |w|^n = 2|w|^n = 2\rho^n. \tag{1}$$

Perché: $|i| = 1$ e $|\overline{w}^n| = |\overline{w}|^n = |w|^n$.

(b) Esprimiamo w in forma trigonometrica:

$$w = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

Da cui per la formula di De Moivre

$$w^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta) \quad \text{e} \quad \overline{w}^n = \rho^n\,(\cos n\theta - i\,\sin n\theta).$$

Possiamo di conseguenza scrivere

$$z_n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta) + i\,\rho^n\,(\cos n\theta - i\,\sin n\theta) = \rho^n[\cos n\theta + \sin n\theta + i\,(\cos n\theta + \sin n\theta)].$$

Questa espressione ci permette di osservare che il numero complesso z_n ha la parte immaginaria $\cos n\theta + \sin n\theta$ uguale alla parte reale $\cos n\theta + \sin n\theta$. I numeri complessi che hanno questa proprietà sono tutti e soli i numeri aventi argomento principale uguale a $\frac{\pi}{4}$ oppure uguale a $\frac{5}{4}\,\pi$. Infatti se $z = x + iy$ e $x = y$, con $x, y \neq 0$ allora $\tan\phi = \frac{x}{y} = \frac{x}{x} = 1$ da cui $\phi = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ovvero (nel primo giro) $\phi = \frac{\pi}{4}$ oppure uguale a $\phi = \frac{5}{4}\,\pi$.

ESERCIZIO 2 (Punti 7)

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

dimostrare che è periodica e determinarne il periodo; trovare il campo di esistenza, i punti (se esistono) di massimo o di minimo relativo, gli intervalli di monotonia, di concavità o convessità, eventuali flessi, punti angolosi o cuspidi. Tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento Determiniamo il minimo $T > 0$ tale che $f(x) = f(x+T)$, ovvero

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sin\left(\frac{x+T}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = f(x+T)$$

da cui

$$\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{x+T}{4} + \frac{\pi}{4}\right),$$

e quindi

$$\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{x+T}{4} + \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad T = k8\pi.$$

Il periodo minimo è $T = 8\pi$.

Il campo di esistenza della funzione è determinato, a causa della presenza della radice quadrata, dalle soluzioni della disequazione

$$\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow k2\pi \leq \frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \leq \pi + k8\pi \iff -\pi + k2\pi \leq x \leq 3\pi + k8\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vista la periodicità, ci limitiamo a studiare la funzione sull'intervallo $[-\pi\,,\,3\pi]$.

Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}{8\sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Nell'intervallo considerato
$f'(x) > 0 \iff -\pi < x < \pi$, $f'(x) = 0 \iff x = \pi$ e $f'(x) < 0 \iff \pi < x < 3\pi$.
Di conseguenza si ha che il punto $x = \pi$ è di massimo relativo ed ovviamente, in questo caso anche assoluto. La funzione risulta crescente sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ e decrescente su $[\pi, 3\pi]$. Inoltre

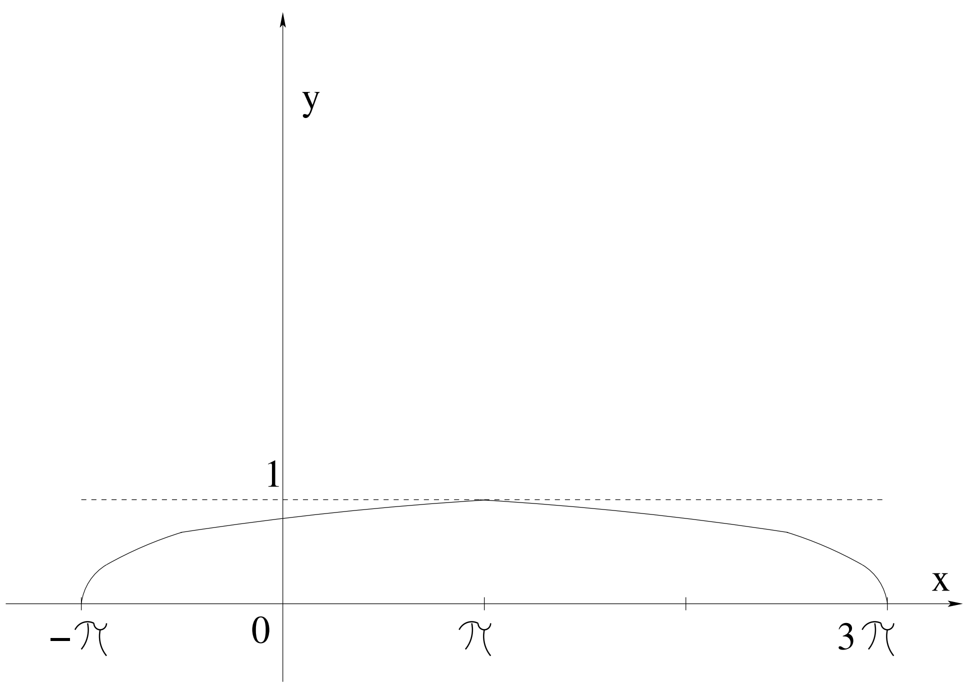
$$\lim_{x \to -\pi+} f'(x) = \lim_{x \to \pi-} f'(x) = \infty.$$

La tangente al grafico di f nei punti $x = -\pi$ e $x = \pi$ è verticale.

Calcoliamo la derivata seconda.

$$f'(x) = \frac{-128\sin^2\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}{64\sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}\;\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Nel campo di esistenza della funzione f'' risulta sempre negativa, di conseguenza la funzione è concava. Possiamo a questo punto tracciare un grafico di f.



ESERCIZIO 3 (Punti 7)

Risolvere il seguente problema di Cauchy e tracciare un grafico approssimato della soluzione

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; \dfrac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}\; u^2(t), \\[2ex] u(1) \;=\; \sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{27}}}. \end{cases}$$

Svolgimento.

Posto $A(t) = \dfrac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}$ e $B(u) = u^2$, osserviamo che A è definita per ogni $t \neq 0$ e $-2 < t < 2$, cerchiamo quindi la soluzione in $(0, 2]$, essendo il dato iniziale posto per il valore di $t = 1$ interno a questo intervallo. Inoltre B, che è definita per ogni $u \in \mathbb{R}$ si annulla solo per $u = 0$, che però non coincide con il dato iniziale $u_0 = \sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{27}}}$.. Per il teorema di esistenza ed unicità di soluzione del problema di Cauchy relativo alle equazioni a variabili separabili, siamo in grado di affermare che esiste una ed una sola soluzione sull'intervallo $(0, 2]$.

Calcoliamo questa soluzione scrivendo l'equazione data nella forma:

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} \;=\; \frac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}$$

Integriamo primo e secondo membro

$$\int_1^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\, ds \;=\; \int_1^t \frac{\sqrt{(4-s^2)}}{s^4}\, ds. \tag{2}$$

Nel primo membro effettuiamo il cambiamento di variabile $\sigma = u(s)$ ed otteniamo

$$\int_1^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\, ds \;=\; \int_{u(1)}^{u(t)} \frac{1}{\sigma^2}\, d\sigma = \left[-\frac{1}{\sigma}\right]_{\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{27}}}}^{u(t)} = -\frac{1}{u(t)} \;+\; \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{12}}. \tag{3}$$

Per quanto riguarda l'integrale al secondo membro osserviamo che può essere scritto nella forma

$$\int_1^t \frac{\sqrt{(4-s^2)}}{s^4}\, ds \;=\; \int_1^t s^{-4}(4-s^2)^{\frac{1}{2}}\, ds,$$

si tratta di un integrale binomio, dove $m = -4$, $p = 2$, $q = \dfrac{1}{2}$. Osserviamo che risulta intero $q + \dfrac{m+1}{p}$.
Risolviamo ponendo: $\tau = s^2$.

$$\int_1^t \frac{\sqrt{(4-s^2)}}{s^4}\, ds \;=\; \int_1^{t^2} \frac{1}{2}\, \frac{\sqrt{4-\tau}}{\tau^2\sqrt{\tau}}\, d\tau \;=\; \int_1^{t^2} \frac{1}{2\,\tau^2}\sqrt{\frac{4-\tau}{\tau}}\, d\tau$$

Operiamo il seguente cambiamento di variabile : $r = \sqrt{\dfrac{4-\tau}{\tau}}$ da cui $d\tau = \dfrac{-8r}{(1+r^2)^2}\, dr$. L'integale si scrive nella forma

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\frac{4-t^2}{t^2}}} -\frac{1}{4}\, r^2\, dr \;=\; \left[-\frac{1}{12}\, r^3\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\frac{4-t^2}{t^2}}} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4} \;-\; \frac{1}{12}\, \frac{\sqrt{(4-t^2)^3}}{t^3}$$

Da questo, tenuto conto di (2) e (3) otteniamo:

$$-\frac{1}{u(t)} \;+\; \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \;-\; \frac{1}{12}\, \frac{\sqrt{(4-t^2)^3}}{t^3} \;\Longleftrightarrow\; u(t) \;=\; \frac{1}{\frac{\sqrt{(4-t^2)^3}}{12\,t^3} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{12}} \;-\; \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Osserviamo che l'integrale (4) può essere risolto anche nel modo che segue.
Ponendo $s = 2\cos\tau$, quindi $ds = -2\sin\tau \; d\tau$, otteniamo

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} \frac{2\sin\tau}{16\,\cos^4\tau}\;(-2\,\sin\tau)\;d\tau = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} \frac{\sin^2\tau}{4\,\cos^2\tau}\,\frac{1}{\cos^2\tau}\,d\tau = -\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} \frac{\tan^2\tau}{\cos^2\tau}\,d\tau =$$

$$= \left[-\frac{1}{12}\tan^3\tau\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\tan^3\arccos\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\,\frac{\sin^3\arccos\frac{t}{2}}{(\cos\arccos\frac{t}{2})^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\,\frac{\left(\sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{t}{2}}\right)^3}{\frac{t^3}{8}} == \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\,\frac{\left(\sqrt{4-t^2}\right)^3}{t^3}\,.$$

Per tracciare un grafico approssimato della soluzione facciamo alcune osservazioni:

(i) $\lim_{t\to 0+} u(t) = 0$,

(ii) $\lim_{t\to 2-} u'(t) = 0$

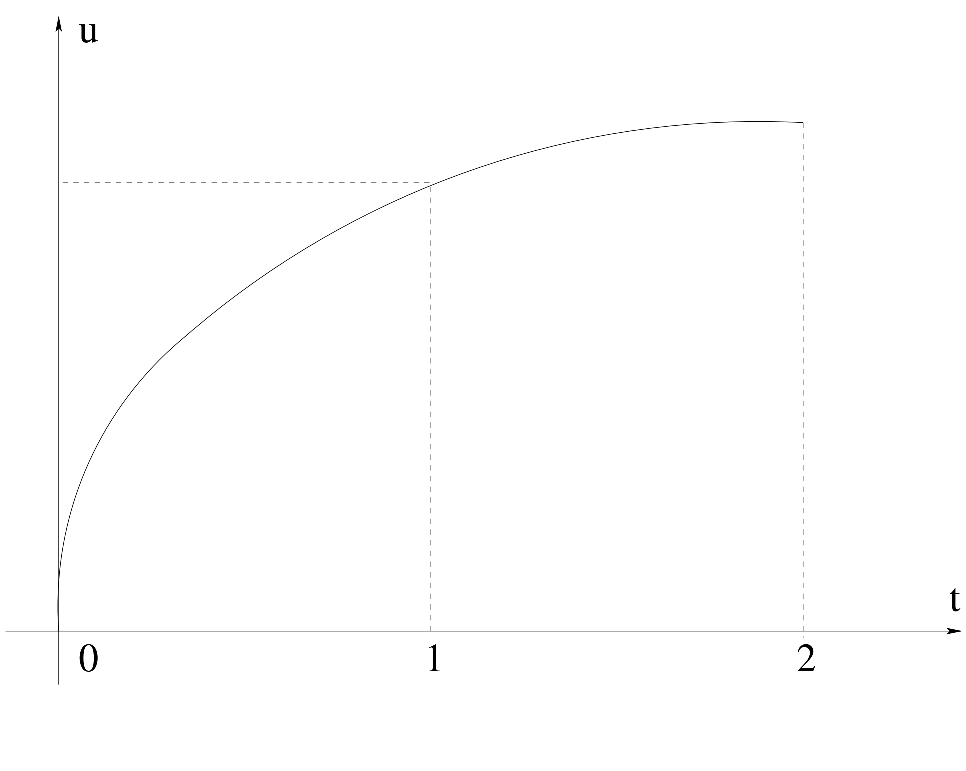
(iii) $\forall t \in (0,2),\;\; u'(t) > 0$ (segue dall'equazione differenziale di partenza),

(iv) $\lim_{t\to 0+} u'(t) = 0$,

quest'ultima viene ottenuta scrivendo la soluzione nella forma

$$u(t) \;=\; \frac{12\sqrt[3]{12}t^3}{\sqrt[3]{12}\sqrt{(4-t^2)^3} + 12\sqrt{3}t^3 - 3\sqrt[3]{12}t^3},$$

e sostituendola nell'equazione del problema di partenza. Il grafico di u avrà in definitiva un andamento del tipo illustrato sotto.



ESERCIZIO 4. (Punti 7)

Stabilire al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza del limite della successione ed eventualmente calcolarlo.

$$\begin{cases} a_0 \,=\, \alpha \\ \\ a_{n+1} \,=\, \sqrt{10\, a_n} \,-\, \sqrt{a_n} \end{cases}$$

Svolgimento.
Determiniamo per quali valori di α la successione è ben definita. È evidente che se $\alpha > 0$ è sempre ben definita perché, per induzione: $a_0 = \alpha > 0$ e $a_n > 0$ implica $a_{n+1} = \sqrt{10\, a_n} - \sqrt{a_n} = \sqrt{a_n}(\sqrt{10} - 1) > 0$.
Osserviamo inoltre che $a_0 = \alpha < a_1 = \sqrt{\alpha}(\sqrt{10} - 1)$ se e solo se
$0 < \alpha < 11 - 2\sqrt{10}$.
Mentre $a_0 = \alpha > a_1 = \sqrt{\alpha}(\sqrt{10} - 1)$ se e solo se
$\alpha > 11 - 2\sqrt{10}$.
La funzione $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{10} - 1)$ risulta crescente:
$\forall x_1, x_2 > 0, \quad 0 < x_1 < x_2 \iff \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \iff \sqrt{x_1}(\sqrt{10} - 1) < \sqrt{x_2}(\sqrt{10} - 1)$.
Possiamo quindi osservare che, se $0 < \alpha < 11 - 2\sqrt{10}$, la successone è crescente in quanto, per induzione $a_0 < a_1$ (vedi sopra) e $a_n < a_{n+1}$ implica $a_{n+1} = f(a_n) < f_(a_{n+1}) = a_{n+2}$.
Osserviamo anche che la successione è limitata superiormente dal valore $11-2\sqrt{10}$. Infatti $a_0 = \alpha < 11-2\sqrt{10}$, e se $a_n < 11 - 2\sqrt{10}$ si ha che $a_{n+1} < 11 - 2\sqrt{10}$ perché

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}(\sqrt{10} - 1) < \sqrt{(11 - 2\sqrt{10})}(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{(\sqrt{10} - 1)^2}(\sqrt{10} - 1) = 11 - 2\sqrt{10}.$$

La successione data è quindi monotona crescente e limitata superiormente, per il teorema di regolarità delle successioni monotone ammette limite reale l che calcoliamo risolvendo l'equazione

$$l = \sqrt{l}(\sqrt{10} - 1).$$

Questa ammette suluzioni $l_1 = 0$ e $l_2 = 11 - 2\sqrt{10}$. $l_1 = 0$ si scarta perché non è di accomulazione per la successione in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ ed è crescente. Il limite nel caso $0 < \alpha < 11 - 2\sqrt{10}$ è quindi $l = 11 - 2\sqrt{10}$.
Se $\alpha > 11 - 2\sqrt{10}$ allora la successione è decrescente. Infatti, procedendo per induzione si ha, per quanto visto sopra, $a_0 = \alpha > a_1 = \sqrt{\alpha}(\sqrt{10} - 1)$, mentre $a_n > a_{n+1}$ implica $a_{n+1} = f(a_n) > f(a_{n+1}) = a_{n+2}$ Inoltre per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > 0$. Da questo deduciamo che la successione è limitata inferiormente. Per il teorema sulle succesioni monotone ammette limite reale l.
Il valore di tale limite si deduce nello stesso modo visto in precedenza. Troviamo i valori $l_1 = 0$ e $l_2 = 11 - 2\sqrt{10}$. Il valore $l_1 = 0$ si esclude in quanto risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 11 - 2\sqrt{10}$. Per verificare questo si procede per induzione.
$a_0 = \alpha > 11 - 2\sqrt{10}$, per ipotesi.
$a_n > 11 - 2\sqrt{10}$ implica $a_{n+1} > 11 - 2\sqrt{10}$ perché

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}(\sqrt{10} - 1) > \sqrt{(11 - 2\sqrt{10})}(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{(\sqrt{10} - 1)^2}(\sqrt{10} - 1) = 11 - 2\sqrt{10}.$$

Infine se $\alpha = 11 - 2\sqrt{10}$, la successione è costantantemente uguale a questo valore che ne risulterà quindi anche il limite.

ESERCIZIO 5. (Punti 5) Utilizzando la formula di Taylor calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^{x^2} \,-\, \cos(x\,\sqrt{2\,|\log x|})}{\sin(x\,\log x) \,-\, \log[1 \,+\, x\,\log x]}.$$

Svolgimento.

Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{x^2} - \cos(x\sqrt{2\,|\log x|})}{\sin(x\,\log x) - \log[1 + x\,\log x]} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2 \log x} - \cos(x\sqrt{2\,|\log x|})}{\sin(x\,\log x) - \log[1 + x\,\log x]}.$$

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite con punto iniziale $y = 0$ tenendo presente che $\lim_{x\to 0+} x^2 \log x = 0$, $\lim_{x\to 0+} x \log x = 0$ $\lim_{x\to 0+} x\sqrt{2|\log x|} = 0$.

$$e^{x^2 \log x} = 1 + x^2 \log x + \frac{1}{2} x^4 \log^2 x + o(x^4 \log^2 x).$$

$$\cos(x\sqrt{2|\log x|}) = 1 - \frac{1}{2}\, x^2\, 2\,|\log x| + \frac{1}{24} x^4\, 4\, \log^2 x + o(x^4 \log^2 x).$$

$$\sin(x \log x) = x \log x - \frac{1}{6} x^3 \log^3 x + o(x^3 \log^3 x).$$

$$\log[1 + x \log x] = x \log x - \frac{1}{2} x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x).$$

Sostituiamo nell'espressione del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2 \log x} - \cos(x\sqrt{2\,|\log x|})}{\sin(x\,\log x) - \log[1 + x\,\log x]} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1 + x^2 \log x + \frac{1}{2} x^4 \log^2 x + o(x^4 \log^2 x) - 1 + \frac{1}{2}\, x^2\, 2\,|\log x| - \frac{1}{24} x^4\, 4\, \log^2 x + o(x^4 \log^2 x)}{\frac{1}{6} x^3 \log^3 x + o(x^3 \log^3 x) - x \log x + \frac{1}{2} x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \log x + x^2\,|\log x| + \frac{1}{3} x^4\, \log^2 x + o(x^4 \log^2 x)}{\frac{1}{2} x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)} =$$

Poiché per $x \to 0^+$ si ha che $|\log x| = -\log x$, otteniamo

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{3} x^4\, \log^2 x + o(x^4 \log^2 x)}{\frac{1}{2} x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{3} x^4\, \log^2 x}{\frac{1}{2} x^2 \log^2 x} = 0$$