ANALISI MATEMATICA II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 20/7/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Calcolare mediante la formula di Taylor il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\sin(\sqrt{1+4x}\, - \,1)\right]^2 \, - \, \log(1+4x^2)}{e^{-2x^2} \, - \, \cos 2x}$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Si consideri la funzione

$$f(x) \, = \, \log \frac{x^2 \, + \, x \, + \, 16}{x},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, limiti agli estermi del C.E. ed eventuali asintoti,

(b) intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo relativo,

(c) intervalli di concavità o convessità ed eventuali flessi.

Tracciare un grafico approssimato di f.

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) & = t^4 \, [\sin u(t)]^4 \\ u\left(\dfrac{15}{2}\right) & = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(i) Determinare l'espressione che definisce in maniera implicita la soluzione u.

(ii) Determinare l'intervallo massimale di esistenza di u.

(iii) Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \, u(t)$.

(iii) Tracciare un grafico approssimato di u.

ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Stabilire il comportamento delle serie seguenti

$$\text{(a)} \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^3} \, \frac{3\,n \, + \, 4\,(\log\, n)^2}{2\,n \, + \, 3\,(\log\, n)^2}, \quad \text{(b)} \; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n+3} \, - \, \sqrt[n]{n+2}\right) x^n, \;\; x\in\mathbb{R}.$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Calcolare mediante la formula di Taylor il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\sin(\sqrt{1+4x}\ -1)\right]^2\ -\log(1+4x^2)}{e^{-2x^2}\ -\cos 2x}$$

Svolgimento.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $x_0 = 0$, delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite cominciando con la radice quadrata.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad \text{posto } t = 4x, \text{ abbiamo } \sqrt{1+4x}\ =\ 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2).$$

da cui

$$\sqrt{1+4x} - 1 = 2x - 2x^2 + o(x^2).$$

$$\sin^2 t = [t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)]^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4),$$

posto $t = 2x - 2x^2 + o(x^2)$, abbiamo

$$\sin^2(\sqrt{1+4x} - 1) = [2x - 2x^2 + o(x^2)]^2 - \frac{1}{3}[2x - 2x^2 + o(x^2)]^4 + o([2x - 2x^2 + o(x^2)]^4) = 4x^2 - 8x^3 + o(x^3).$$

Perché

$$\begin{aligned}[2x - 2x^2 + o(x^2)]^2 &= 4x^2 - 8x^3 + 4x^4 + o(x^4) + 4xo(x^2) - 4x^2 o(x^2) = \\ &= 4x^2 - 8x^3 + o(x^3) + o(x^4) + o(x^3) + o(x^4) = 4x^2 - 8x^3 + o(x^3); \\ \left[2x - 2x^2 + o(x^2)\right]^4 &= 16\,x^4 + o(x^4) = o(x^3)\end{aligned}$$

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \text{ posto } t = 4x^2, \text{ abbiamo } \log(1+4x^2) = 4x^2 - 8x^4 + o(x^4),$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \text{ posto } t = -2x^2, \text{ abbiamo } e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4), \text{ posto } t = 2x, \text{ abbiamo } \cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Quanto ottenuto finora ci permette di scrivere

$$\left[\sin(\sqrt{1+4x}\ -1)\right]^2\ -\log(1+4x^2) = 4x^2 - 8x^3 + o(x^3) - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) = -8x^3 + o(x^3)$$

$$e^{-2x^2}\ -\cos 2x = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) - 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

Sostituiamo nel limite, applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi e semplifichiamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\sin(\sqrt{1+4x}\ -1)\right]^2\ -\log(1+4x^2)}{e^{-2x^2}\ -\cos 2x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-8x^3 + o(x^3)}{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = -6 \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = -\infty.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \frac{x^2 + x + 16}{x},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, limiti agli estermi del C.E. ed eventuali asintoti,

(b) intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo relativo,

(c) intervalli di concavità o convessità ed eventuali flessi.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è dato dall'insieme degli x dove l'argomento del logaritmo è positivo. Osserviamo che il discriminante al numeratore della frazione dell'argomento del logaritmo è negativo, quindi $x^2 + x + 16 > 0$ per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$, si ha dunque che $C.E = \{x : \ x > 0\}$.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Per verificare se esistono asintoti, per $x \to +\infty$, calcoliamo

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Non esistono dunque asintoti.
Determiniamo gli intervalli di monotonia di f calcolando la sua derivata prima.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 16}{x\,(x^2 + x + 16)}$$

Gli zeri di $f'(x)$ sono $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$. Il polinomio al numeratore risulta negativo per valori interni e positivo per quelli esterni. D'altra parte la funzione è definita solo per $x > 0$, e quindi possimo concludere, tenuto conto del segno del denominatore che
$f'(x) < 0$ per $x \in (0, 4)$, il che implica che la funzione in questo intervallo decresce;
$f'(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, il che implica che la funzione in questo intervallo è crescente.
Il punto $x_2 = 4$ è di minimo relativo (anche assoluto) per f.

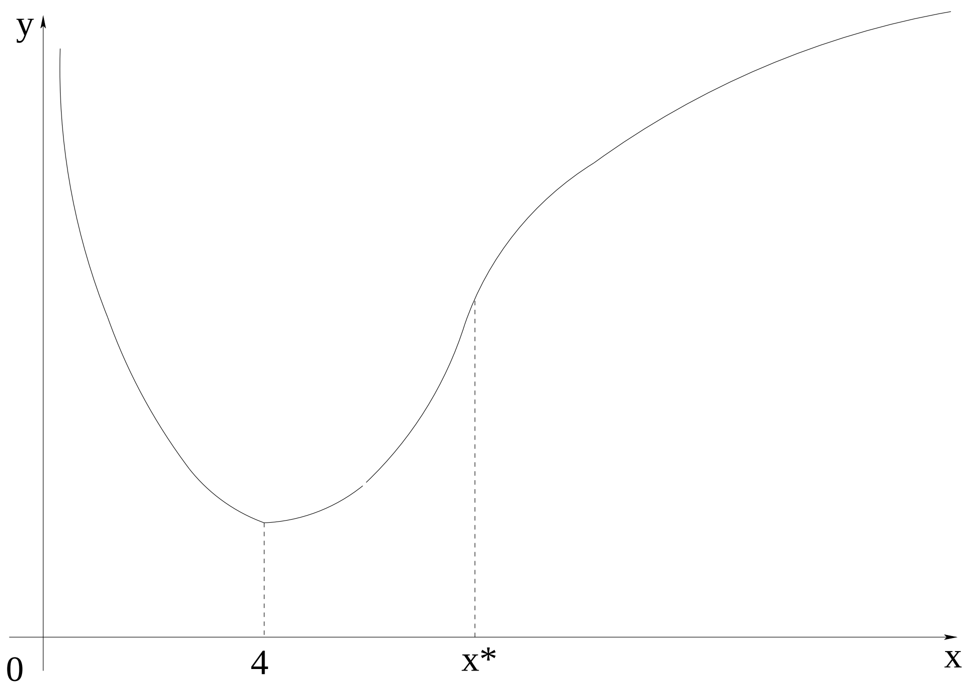
Determiniamo gli intervalli di concavità e di convessità per f calcolando la sua derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-x^4 + 64x^2 + 32x + 256}{x^2(x^2 + x + 16)^2}$$

Il segno di f'' è determinato dal numeratore, che scriveremo quindi nel modo seguente

$$-x^4 + 64x^2 + 32x + 256 = (x + 8)(-x^3 + 8x^2 + 32)$$

Per $x > 0$ si ha $x + 8 > 0$. Studiamo il segno di $g(x) = -x^3 + 8x^2 + 32$. Essendo $g'(x) = -3x^2 + 16x$, si ha che $g'(x) > 0$ per $x < \frac{8}{3}$ e $g'(x) < 0$ per $x > \frac{8}{3}$. La funzione g risulta crescente per $0 < x < \frac{8}{3}$ e decrescente per $x > \frac{8}{3}$. In particolare il punto $x = \frac{8}{3}$ è di massimo relativo per g. Infine $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. In base a queste considerazioni possiamo stabilire che esiste uno ed un solo punto $x^* > \frac{8}{3}$ dove $g(x^*) = 0$, ovvero $f''(x^*) = 0$. Per $0 < x < x^*$ si ha $f''(x) > 0$, mentre per $x > x^*$ si ha $f''(x) < 0$. f risulta dunque convessa sull'intervallo $(0, x^*)$ e concava su $(x^*, +\infty)$. Il punto x^* risulta punto di flesso per f. Si osservi che $x^* > 4$ perché $f''(4) > 0$.
Possiamo ora utilizzare tutte le osservazioni fatte sopra tracciando un grafico approssimato di f.



ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) &= t^4 \ [\sin u(t)]^4 \\ u\left(\dfrac{15}{2}\right) &= \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(i) Determinare l'espressione che definisce in maniera implicita la soluzione u.

(ii) Determinare l'intervallo massimale di esistenza di u.

(iii) Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} u(t)$.

(iii) Tracciare un grafico approssimato di u.

Svolgimento.
Posto $A(t) = t^4$ e $B(u) = \sin^4 u$, osserviamo che il dato iniziale è compreso tra due radici di B, ovvero tra 0 e π, mentre A è definita su tutto $\mathbb{R}$. La soluzione esisterà e sará unica su tutto $\mathbb{R}$. Per calcolarla consideriamo l'equazione

$$\frac{u'(t)}{\sin^4 u(t)} = t^4,$$

ed integriamo tra $\dfrac{15}{2}$ e t :

$$\int_{\frac{15}{2}}^{t} \frac{u'(s)}{\sin^4 u(s)}\, ds = \int_{\frac{15}{2}}^{t} s^4\, ds.$$

Al secondo membro si ha

$$\int_{\frac{15}{2}}^{t} s^4\, ds = \left[\frac{1}{5} t^5\right]_{\frac{1}{15}}^{t} = \frac{1}{5}\, t^5 - \frac{1}{5}\frac{(15)^5}{32}.$$

Al primo membro effettuiamo il cambiamento di variabile $r = u(t)$, e quindi per $t = \frac{15}{2}$ $r = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{15}{2}}^{t} \frac{u'(s)}{\sin^4 u(s)}\, ds \;=\; \int_{\frac{\pi}{2}}^{u(t)} \frac{1}{\sin^4 r}\; dr = \int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \frac{(1+\sigma^2)^4}{16\,\sigma^4}\;\frac{2}{1+\sigma^2}\, d\sigma \;=\; \int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \frac{1+3\sigma^2+3\sigma^4+\sigma^6}{8\,\sigma^4}\; d\sigma.$$

Nel 'integrale sopra abbiamo effettuato il cambiamento di variabile:

$$\tan\frac{r}{2} = \sigma, \text{ quindi } dr = \frac{2}{1+\sigma^2}\, d\sigma, \;\; \sin r = \frac{2r}{1+\sigma^2}.$$

Procedendo nel calcolo abbiamo

$$\int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \frac{1+3\sigma^2+3\sigma^4+\sigma^6}{8\,\sigma^4}\; d\sigma \;=\; \int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^4} + 3\frac{1}{\sigma^2} + 3 + \sigma^2\right) d\sigma \;=\; \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sigma^3} \;-\; \frac{3}{\sigma} + 3\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3\right]_1^{\tan\frac{u(t)}{2}} \;=$$

$$= \frac{-1}{24}\,\frac{1}{\tan^3\frac{u(t)}{2}} \;-\; \frac{3}{8}\frac{1}{\tan\frac{u(t)}{2}} + \frac{3}{8}\,\tan u(t) + \frac{1}{24}\,\tan^3\frac{u(t)}{2} \;-\; \frac{35}{12}.$$

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy proposto è data implicitamente dall'espressione:

$$\frac{-1}{24}\,\frac{1}{\tan^3\frac{u(t)}{2}} \;-\; \frac{3}{8}\frac{1}{\tan\frac{u(t)}{2}} + \frac{3}{8}\,\tan u(t) + \frac{1}{24}\,\tan^3\frac{u(t)}{2} \;-\; \frac{35}{12} = \frac{1}{5}\,t^5 \;-\; \frac{1}{5}\frac{(15)^5}{32}.$$

Per risolvere il punto (iii) deduciamo, dall'equazione, che la derivata prima dalla soluzione è sempre positiva in quanto il termine al secondo membro, $t^4\,\sin^4 u(t)$ è sempre maggiore di zero. Di conseguenza u è monotona crescente. Per il teorema di regolarità delle funzioni monotone u ammette limite sia per x che tende a $+\infty$ sia per x che tende a $-\infty$. Tale limite è un numero reale l in quanto u è limitata tra 0 e π, che sono gli zeri di B (vedi le considerazioni che abbiamo fatto all'inizio sulla tesi del teorema di essitenza di soluzioni delle equazioni differenziali a variabili separabili).
Per calcolare l integriamo primo e secondo membro dell'equazione di partenza

$$u(t) - \frac{15}{2} = \int_{\frac{15}{2}}^{t} u'(s)\, ds \;=\; \int_{\frac{15}{2}}^{t} \; s^4\;[\sin\, u(s)]^4\, ds$$

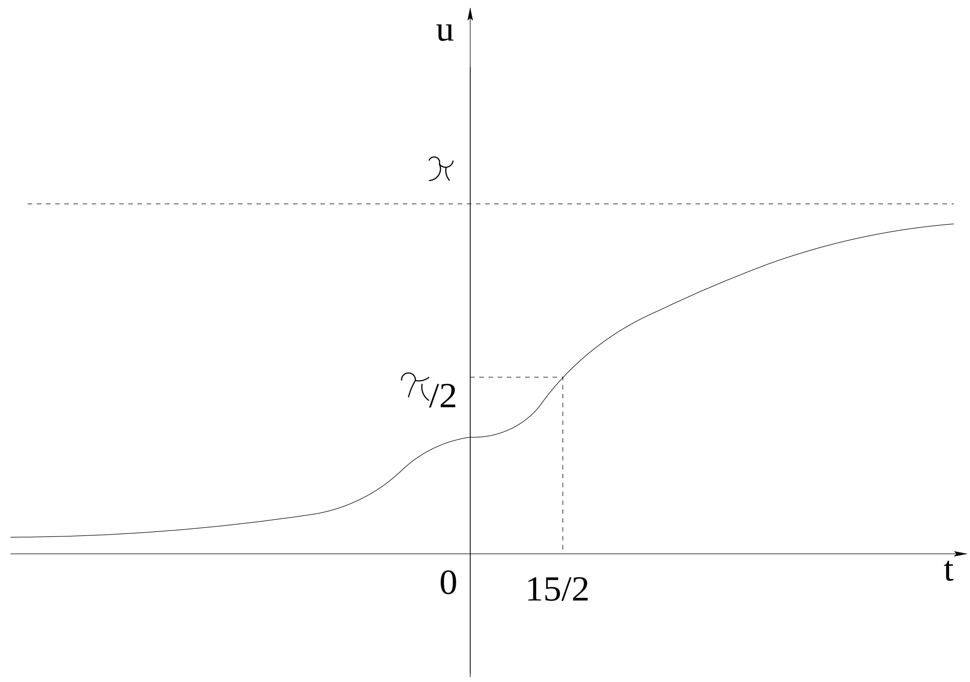
ovvero

$$u(t) \;=\; \frac{15}{2} + \int_{\frac{15}{2}}^{t} \; s^4\;[\sin\, u(s)]^4\, ds \tag{1}$$

Se fosse $\lim\limits_{x\to+\infty} u(t) = l$ con $0 < l < \pi$ si avrebbe $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin^4 u(t) = \sin^4 l \neq 0$. Ma in questo caso in (1) il primo membro tenderebbe al valore finito l mentre il secondo membro andrebbe a $+\infty$. Infatti, dato che $\sin^4 u(t)$ tende a $\sin^4 l$ per t che tende a $+\infty$, esisterebbe t_0 tale che per ogni $t > t_0$ $\sin^4 u(t) > \dfrac{\sin^4 l}{2}$. In tal caso in (1) si avrebbe

$$u(t) \;=\; \frac{15}{2} + \int_{\frac{15}{2}}^{t} \; s^4\;[\sin\, u(s)]^4\, ds \;>\; \int_{\frac{15}{2}}^{t} \frac{15}{2}\,\frac{\sin^4 l}{2} \;>\; \left(t \;-\; \frac{15}{2}\right)\frac{15}{2}\,\frac{\sin^4 l}{2} \;\;\overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\;\; +\infty.$$

Assurdo perché u è limitata. Quindi L'unica possibilità è che $l = \pi$. Nello stesso modo si ragione se $x \to -\infty$ per stabilire che $l = 0$.
Il grafico di u è il seguente.



ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Stabilire il comportamento delle serie seguenti

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^3}\, \frac{3\,n\,+\,4\,(\log\,n)^2}{2\,n\,+\,3\,(\log\,n)^2}, \quad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n+3}\,-\,\sqrt[n]{n+2}\right) x^n, \ \ x\in\mathbb{R}.$$

Svolgimento.

(a)
Il termine generale della serie è composto dal prodotto di due successioni $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

$$b_n = \frac{n^2}{1+n^3}, \quad c_n = \frac{3\,n\,+\,4\,(\log\,n)^2}{2\,n\,+\,3\,(\log\,n)^2}.$$

Osserviamo che valgono le seguenti diseguaglianze:

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} : b_n = \frac{n^2}{1+n^3} \geq \frac{1}{2n}, \quad c_n = \frac{3\,n\,+\,4\,(\log\,n)^2}{2\,n\,+\,3\,(\log\,n)^2} > 1.$$

Da questo deduciamo che vale la maggiorazione:

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} : \quad b_n\,\cdot\,c_n = \frac{n^2}{1+n^3}\, \frac{3\,n\,+\,4\,(\log\,n)^2}{2\,n\,+\,3\,(\log\,n)^2} \geq \frac{1}{2n}$$

Da questo e dal teorema del confronto, per le serie a termini positivi, deduciamo che la serie data è divergente in quanto il suo termine generale è minorato dal termine generale della serie

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

perché quest'ultima è una serie armonica con esponente $\alpha = 1$.

(b)

Consideriamo la convergenza assoluta della serie applicando il criterio della radice ennensima al valore assoluto del termine generale della serie:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2}\,|x|^n} = \lim_{\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2}}\;|x| = |x|.$$

Perché il limite da calcolare si può scrivere nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(e^{\frac{1}{n}\log(3+n)} - e^{\frac{1}{n}\log(2+n)}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left[e^{\frac{1}{n}\log(2+n)}\left(e^{\frac{1}{n}\log(3+n)-\frac{1}{n}\log(2+n)} - 1\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

Osserviamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2+n)} = 1$. Inoltre l'argomento dell'esponenziale contenuto nella parentesi può essere sviluppato come segue:

$$\frac{1}{n}\log(3+n) - \frac{1}{n}\log(2+n) = \frac{1}{n}\left[\log(3+n) - \log(2+n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log(2+n) + \log\left(1+\frac{1}{n+2}\right) - \log(2+n)\right] = \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{1}{n(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Perché

$$o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

Tenuto conto degli sviluppi eseguiti sopra, e del principio di sostituzine degli infinitesimi:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[\frac{1}{n(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log\left[\frac{1}{n(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = 1$$

Tornando alla serie e tenuto conto del criterio del limite possiamo affermare che:
se $x > 1$ la serie diverge, perché in questo caso $|x| = x$,
se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi converge.
Se $x = 1$ consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2}$$

Se effettuiamo di nuovo gli sviluppi visti sopra si ha che

$$\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2} = e^{\frac{1}{n}\log(3+n)} - e^{\frac{1}{n}\log(2+n)} = e^{\frac{1}{n}\log(2+n)}\left(e^{\frac{1}{n}\log(3+n)-\frac{1}{n}\log(2+n)} - 1\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{n}\log(2+n)}\left[\frac{1}{n(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Il termine che abbiamo ottenuto si può confrontare mediante il criterio del confronto asintotico con il termine generale di una serie armonica convergente: $\frac{1}{n^2}$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\log(2+n)}\left[\frac{1}{n(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Deduciamo quindi che nel caso $x = 1$ la serie converge.
Sia $x = -1$. La serie è a termini di segno alterno e sono verificate le ipotesi del teorema di Leibniz, di conseguenza converge.
Se $x < -1$ la serie è indeterminata perché è a termini di segno alterno ma non è infinitesimo il fattore di $(-1)^n$ dato che possiamo scrivere

$$\left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2}\right)x^n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2}\right)|x|^n,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n+2}\right)|x|^n = +\infty.$$