ESERCIZI SUI ANELLI E CORPI

Esercizio 1. *Fissato* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, *consideriamo sull'insieme*

$$n\mathbb{Z} = \{n\,k : \;\; k \in \mathbb{Z}\}$$

le ordinarie operazioni di somma $(+)$ *e prodotto* $(\cdot)$ *in* $\mathbb{Z}$. *Dimostrare che* $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *è un anello comutativo.*

Esercizio 2. *Si consideri l'insieme* $S = \{a, b\}$. *Su di esso definiamo le operazioni* $(\oplus)$ *e* $(\otimes)$ *mediante le seguenti tabelle:*

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\otimes$	a	b
a	a	a
b	a	b

Dimostrare che $(S, \oplus, \otimes)$ *è un anello*

Esercizio 3. *Dimostrare che l'insieme* S *dei* **numeri dispari** *rispetto alle ordinarie operazioni di somma e moltiplicazione non ha la struttura di anello.*

Esercizio 4. *Cosideriamo il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}$

$$S \;=\; \{a + b\sqrt{2} : \;\; a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dimostrare che $(S, +, \cdot)$ *è un anello, dove* $(+)$ *e* $(\cdot)$ *sono le usuali operazioni di* $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. *Cosideriamo il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}$

$$S \;=\; \{a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{5^2} : \;\; a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Dimostrare che $(S, +, \cdot)$ *è un anello, dove* $(+)$ *e* $(\cdot)$ *sono le usuali operazioni di* $\mathbb{R}$.

Esercizio 6. *Sull'insieme* $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definiamo le seguneti operazioni:*

$$\begin{array}{ccccc} (a, b) & + & (a_1, b_1) & = & (a + a_1, b + b_1) \\ (a, b) & \cdot & (a_1, b_1) & = & (aa_1, bb_1) \end{array} .$$

Dimostrare che $(M, +, \cdot)$ *è un anello dotato di divisori di zero e di unità.*

Esercizio 7. *Dimostrare che l'anello dell'Esercizio 4 è un corpo.*

Esercizio 8. *Dimostrare che l'anello dell'Esercizio 5 è un corpo.*

Esercizio 9. *Consideriamo l'insieme $\mathcal{M}$ delle matrici 2×2 del tipo seguente*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che, con le operazioni $+$ di somma e di prodotto $\cdot$ tra matrici, $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ è un corpo.

Esercizio 10. *Dimostrare che esiste un isomorfismo tra il corpo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il corpo $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ definito nel precedente esercizio.*

Esercizio 11. *Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da*

$$f(z) = \overline{z}, \quad \text{ovvero} \quad f(a + ib) = a - ib.$$

dimostrare che è un automorfismo.

Esercizio 12. *Sia $(S, +, \cdot)$ è l'anello definito nell'Esercizio 4, si consideri l'applicazione $f : S \longrightarrow S$ definita da*

$$f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

dimostrare che è un automorfismo.

Esercizio 13. *Consideriamo l'anello $(M, +, \cdot)$ dell'Esercizio 6. Consideriamo l'applicazione $f : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da:*

$$f((a, b)) = a$$

provare che

(i) *f è un omomorfismo dell'anello $(M, +, \cdot)$ su $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$;*

(ii) *il nucleo di f è*

$$\ker\, f = \{(0, b) : \ b \in \mathbb{Z}\}$$

(iii) *$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ker\, f)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Esercizio 14. *Si consideri l'insieme*

$$S \ = \ \{a + b\sqrt{5}\ i, \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dimostrare che $(S, +, \cdot)$ è un corpo.

Esercizio 15. *Esistono elementi dell'anello $\mathbb{Z}_6$ tali che*

$$[3]x^2 - [2]x - [1] = [0]?$$

Esercizio 16. *Esistono elementi dell'anello $\mathbb{Z}_6$ tali che*

$$x^2 - 5x = 0?$$

Esercizio 17. *Dimostrare che esistono nell'anello $\mathbb{Z}_{10}$ due sottoanelli che sono corpi.*