Introduzione alla coomologia étale: esercizi

1 30.01.2019

Esercizio 1.1. Trovare un esempio di uno schema irriducibile X e di un sottoschema chiuso ed irriducibile Y tali che $\dim(X) \neq \dim(Y) + \operatorname{codim}_X(Y)$.

Esercizio 1.2. Sia $E/\mathbb{F}_5$ la curva ellittica definita in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_5}$ dall'equazione omogenea $y^2z = x^3 + z^3$. Trovare una formula esplicita per $|E(\mathbb{F}_{5^n})|$.

Nota. Per questo esercizio si può ammettere come nota la forma della funzione Z di una curva su un campo finito.

Esercizio 1.3 (Grassmanniana)**.** Per ogni $1 \leqslant k \leqslant n-1$ sia $G(k,n)$ la Grassmanniana definita su $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$; per ogni campo K, i punti di $G(k,n)$ a valori in K sono (in bigezione naturale con) i sottospazi lineari di dimensione k in K^n.

1. Mostrare che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ agisce transitivamente su $G(k,n)(\mathbb{F}_q)$, e che lo stabilizzatore di ogni punto è isomorfo a $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{M}_{k,n-k}(\mathbb{F}_q)$.

2. Dedurre che
$$|G(k,n)(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\cdots(q-1)} =: \binom{n}{k}_q.$$

3. Mostrare che
$$\binom{n}{k}_q = q^k\binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q$$
e dedurne $\binom{n}{k}_q = \sum_{i=0}^{k(n-k)} \lambda_{n,k}(i)q^i$, dove $\lambda_{n,k}(i)$ è il numero di partizioni di i in al più $n-k$ parti, ognuna minore o uguale a k.

4. Con la notazione precedente, dedurre che
$$Z(G(k,n)/\mathbb{F}_q, t) = \prod_{i=0}^{k(n-k)} \frac{1}{(1-q^it)^{\lambda_{n,k}(i)}}$$
e determinare i numeri di Betti (=dimensioni degli spazi di coomologia) della Grassmanniana complessa.

2 08.02.2019

Esercizio 2.1. Sia $X = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_{p^n}$, visto come schema su $\mathbb{F}_p$. Descrivere lo spazio topologico $\overline{X}$ e l'azione del Frobenius (relativo, assoluto, aritmetico) $\mathrm{Fr}_{\overline{X},p}$ su di esso.

Esercizio 2.2. Assumendo le congetture di Weil **complete** (cioè inclusa l'ipotesi di Riemann), dimostrare che $P_i(t) = \det\left(1 - \mathrm{Fr}^*_{\overline{X},q}\, t \;\middle|\; H^i(\overline{X})\right)$ non dipende dalla coomologia di Weil $H^\bullet(-)$ scelta.

Esercizio 2.3 (Somme di Kloosterman). 1. Sia $p > 2$ un numero primo e siano $a, b \in \mathbb{F}_p^\times$. Dimostrare che il completamento proiettivo $\tilde{\mathcal{C}}$ della curva affine $\mathcal{C}/\mathbb{F}_p$ data dall'equazione $y^2 + 4ab = (x^p - x)^2$ è di genere $p-1$.

2. Ricordiamo che le somme di Kloosterman generalizzate sono definite da

$$S_{m,n}(a,b,p) = \sum_{t \in \mathbb{F}_{p^n}^\times} \exp\left(\frac{2\pi m i}{p}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(at + b\bar{t})\right),$$

dove $a, b \in \mathbb{F}_p^\times$ sono parametri fissati. Abbiamo visto che per ogni m la somma di Kloosterman $S_{m,1}(a,b,p)$ si scrive come $-\alpha_m - \beta_m$, dove α_m, β_m sono di modulo $\sqrt{p}$. Dimostrare che $S_{m,n}(a,b,p) = -\alpha_m^n - \beta_m^n$ e che $|S_{m,n}(a,b,p)| \leqslant 2p^{n/2}$.

Esercizio 2.4. Sia X_0 uno schema proiettivo liscio su $\mathbb{F}_q$ e sia $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$. Sia F il Frobenius relativo associato. Sia g un automorfismo di X di ordine finito che commuta con F. Definiamo

$$\mathcal{L}(g,X) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \,\mathrm{Tr}(g^* \mid H^i(X)) \quad \text{e} \quad f(t) = \sum_{n \geqslant 1} \mathcal{L}(gF^n, X)\, t^n.$$

1. Dimostrare che f è una funzione razionale e che $f(\infty) = \mathcal{L}(g,X)$.

2. Dimostrare che gF è un Frobenius per una differente $\mathbb{F}_q$ struttura definita su X. Equivalentemente, esiste uno schema X_1 definito su $\mathbb{F}_q$ tale che $X_1 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ è isomorfo a X e gF è il Frobenius relativo associato.

3. Dimostrare che $\mathcal{L}(g,X)$ è un numero intero.

   Nota. Se g ha punti fissi isolati questa affermazione segue dalla formula della traccia di Lefschetz dimostrata in classe; in generale, si può dedurla da quella fatta in classe grazie ai due punti precedenti.

3 15.02.2019

Per le prossime lezioni, se non viene specificato diversamente, tutti gli anelli sono commutativi unitari e noetheriani, e le mappe tra anelli sono morfismi di anelli unitari. I morfismi tra schemi sono in quelle che abbiamo chiamato ipotesi standard.

Esercizio 3.1. Sia $A = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3)$ e siano T il modulo tangente e Ω il modulo cotangente di A su $\mathbb{C}$. Dimostrare che $T^* := \mathrm{Hom}_A(T, A)$ non è isomorfo a Ω. [Ricordo che $T = \mathrm{Hom}_A(\Omega, A)$]

Esercizio 3.2. Sia A_i un sistema induttivo di R-algebre commutative unitarie e sia A il limite induttivo del sistema A_i nella categorie delle R-algebre. Dimostrare che

$$\Omega_{A/R} \simeq \varinjlim A \otimes_{A_i} \Omega_{A_i/R},$$

dove il limite sulla destra è nella categoria degli A-moduli e le mappe $\Omega_{A_i/R} \longrightarrow \Omega_{A_j/R}$ sono indotte dalle mappe $A_i \longrightarrow A_j$.

Potrebbe essere utile affrontare prima il caso in cui non ci siano morfismi tra le A_i. Allora ci si riduce ad $A = \otimes_R A_i$ e $\Omega_{A/R} \simeq \bigoplus A \otimes_{A_i} \Omega_{A_i/R}$.

Esercizio 3.3. Sia $A = R[x_1, \ldots, x_n]/I$ e sia I generato da $(f_1, \ldots, f_m)$. Allora $\Omega_{A/R} = 0$ se e solo se l'ideale generato dai determinanti dei minori $n \times n$ della matrice Jacobiana $\big(\partial f_j / \partial x_i\big)$ è uguale ad A.

Esercizio 3.4. Sia A una $\Bbbk$-algebra finitamente generata con $\Bbbk$ un campo. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A. Dimostrare che l'applicazione $d_\mathfrak{m} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{A/\Bbbk}(\mathfrak{m})$ è iniettiva se e solo se esiste $\chi : \Bbbk(\mathfrak{m}) \longrightarrow A/\mathfrak{m}^2$ che sia una sezione della proiezione naturale come $\Bbbk$-algebre.

Esercizio 3.5. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che $\Omega_{B/A} = 0$ se e solo se per ogni diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "\pi"] & C/I \\ B \arrow[urr, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

tale che I è un ideale di C con $I^2 = 0$, esiste al più un morfismo $h' : B \longrightarrow C$ che faccia commutare i due triangoli che si formano.

Esercizio 3.6. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi in ipotesi standard. Sia $x \in X$ e sia $y = f(x)$. Supponiamo che f sia etale in x. Allora $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{Y,y}$ e $k(x) \otimes_{k(y)} T^*_y Y \simeq T^*_x X$. In particolare x è regolare se e solo se lo è y. [Con $T^*_x X$ indico $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.]

Esercizio 3.7. Sia $A = \mathbb{C}[x, y, z, w]/(y^2 - xz, y^3 - x^2 w, z^3 = xw^2)$ e sia $B = \mathbb{C}[x, y, z, w]/(xw - yz, y^2 - xz, y^3 - x^2 w, z^3 = xw^2)$ e sia $\pi : A \longrightarrow B$ la proiezione al quoziente. Sia $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec}(A)$ e sia $f : X \longrightarrow Y$. Dimostrare che $f^*\Omega_{Y/\mathbb{C}}(x) \simeq \Omega_{X/\mathbb{C}}(x)$ è un isomorfismo per ogni $x \in X$ massimale ma che f non è etale.

[Questo esercizio è un controesempio all'affermazione inversa dell'esercizio precedente. In questo caso però non ho $f^*\Omega_{Y/S} \simeq \Omega_{X/S}$. Sicuramente esiste anche un controesempio in questo senso ma questo è il meglio che mi sia venuto in mente]

Esercizio 3.8. Sia $f \in R[t]$ e sia $A = R[t]/(f)$. Sono equivalenti:

1. A è étale su R
2. $\Omega_{A/R} = 0$.
3. $(f, f') = A$.

[Consiglio di fare prima il caso monico che è più semplice. Per il caso generale potrebbe essere utile dimostrare, o ricordare, che se un polinomio è un divisore di zero in un anello di polinomi allora è annullato da un polinomio costante]

Esercizio 3.9. Sia A un anello noetheriano e I un suo ideale. Se A/I è piatto come A modulo allora $A \simeq I \times A/I$ come anello.

Esercizio 3.10. Sia $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ in ipotesi standard. Sia gf etale e sia g non ramificata. Allora f è etale. [Descrivere f come la composizione del grafico $\Gamma : X \longrightarrow X \times_Z Y$ e della proiezione $X \times_Z Y \longrightarrow Y$. Dimostrare che entrambe le mappe sono etale, perché ottenute per cambio di base da morfismi etale]

4 Richiami su filtrazioni stabili

Sia A un anello, I un suo ideale e M un A-modulo. Sia $\mathcal{M} : M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \ldots$ una I-filtrazione, ovvero $I \cdot M_n \subset M_{n+1}$ per ogni n.

In questi casi definiamo gli scoppiamenti:

$$Bl_I(A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n \qquad Bl_{\mathcal{M}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} M_n$$

che ereditano rispettivamente una struttura di A algebra graduata di $Bl_I(A)$ modulo graduato.

Inoltre diciamo che una I-filtrazione di un modulo M è stabile se $I \cdot M_n = M_{n+1}$ per n abbastanza grande.

Esercizio 4.1. Con le notazioni appena introdotte. La filtrazione $\mathcal{M}$ è I-stabile se e solo se $Bl_{\mathcal{M}}$ è un $Bl_I(A)$ modulo finitamente generato.

Esercizio 4.2. Sia A notheriano, M un A modulo finitamente generato e N un suo sottomodulo. Se $\mathcal{M}$ è una filtrazione I-stabile di M, allora la filtrazione $N_n = N \cap M_i$ è I-stabile.[applicare l'esercizio precedente]

Esercizio 4.3 (Lemma di Artin-Rees)**.** Sia A notheriano, M un A modulo finitamente generato e sia $N = \cap I^n M$. Allora

1. $IN = N$
2. Se A è locale e $I \neq A$ allora $N = 0$.

5 Esercizi 3 marzo 2019

Esercizio 5.1 (Cambio di base)**.** Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow A'$ di anelli. Sia M un A modulo e N un B modulo.

a) Se M è piatto su A allora $M_B = B \otimes_A M$ è piatto su B.

b) Se N è piatto su B allora $N' = A' \otimes_A N$ è piatto su $B' = A' \otimes_A B$

Esercizio 5.2. Sia $f : A \longrightarrow B$ di anelli e sia M un B modulo. Allora sono equivalenti:

a) M è piatto su A;

b) $M_{\mathfrak{q}}$ è piatto su $A_{\mathfrak{q}^c}$ per ogni $\mathfrak{q}$ ideale primo di B;

c) $M_{\mathfrak{m}}$ è piatto su $A_{\mathfrak{m}^c}$ per ogni $\mathfrak{m}$ ideale massimale di B;

Esercizio 5.3. Sia $f : A \longrightarrow B$ una mappa piatta di anelli. Allora sono equivalenti:

a) M è fedelmente piatto su A;

b) $f^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ è surgettiva;

c) per ogni $\mathfrak{m}$ ideale massimale di A esiste $\mathfrak{p}$ ideale primo di B e $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{m}$

Esercizio 5.4. Sia $f : (A, \mathfrak{m}) \longrightarrow (B, \mathfrak{n})$ di anelli locali noetheriani. Sia M un B modulo finitamente generato. Sia a un elemento di A tale che a non è divisore di zero né in A né in M. Allora M è piatto su A se e solo se M/aM è piatto su A/aA.

Esercizio 5.5. Siano $g : R \longrightarrow A$ e $f : A \longrightarrow B$ di anelli noetheriani. Sia M un B modulo finitamente generato piatto su R. Allora M è piatto su A se e solo se $\Bbbk(\mathfrak{l}) \otimes_R M$ è piatto su $\Bbbk(\mathfrak{l}) \otimes_R A$ per ogni $\mathfrak{l}$ primo di R.

Esercizio 5.6. Sia A noetheriano e sia B una A algebra finitamente generata. Dimostrare che B è étale su A se e solo se esiste un isomorfismo

$$B \simeq \frac{A[t_1, \ldots, t_n]}{(f_1, \ldots, f_n)}$$

con $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial t_i}\right)$ invertibile in B.

Esercizio 5.7. Completare la dimostrazione della caratterizzazione diagrammatica dei morfismi étale.

Esercizio 5.8. Sia A un anello notheriano e $\mathfrak{p}$ un suo ideale primo tale che $A_{\mathfrak{p}}$ è un dominio. Allora esiste $f \notin \mathfrak{p}$ tale che A_f è un dominio. [Questo esercizio è un po' a margine della discussione sulla liscezza, non serve nulla di quello che abbiamo fatto ma direi è utile averlo presente in alcune dimostrazioni sulla liscezza]

Esercizio 5.9. Si dimostri che i morfismi lisci sono stabili per cambio di base e composizione.

Esercizio 5.10. Si consideri il seguente diagramma commutativo di schemi in cui i morfismi sono in ipotesi standard.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

con f liscia. Allora la successione

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{X/S} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

è esatta e localmente split. Se X e Y sono lisce su S allora vale anche l'implicazione inversa.

6 08.03.2019

Esercizio 6.1 (Fasci étale su $\operatorname{Spec} K$)**.** Sia L/K un'estensione di campi che sia finita e di Galois (in particolare, separabile). Siano $S = \operatorname{Spec} K$ e $\mathcal{F}$ un fascio sul sito étale piccolo di S.

1. Mostrare che c'è un'azione naturale di $\operatorname{Gal}(L/K)$ su $\mathcal{F}(\operatorname{Spec} L)$.
2. Dimostrare che l'azione del punto precedente induce un'identificazione naturale
$$\mathcal{F}(\operatorname{Spec} L)^{\operatorname{Gal}(L/K)} = \mathcal{F}(K).$$
3. Dedurne che la categoria dei fasci étale sul sito étale piccolo di $\operatorname{Spec} K$ è equivalente alla categoria dei $\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$-insiemi, ovvero la categoria degli insiemi (con topologia discreta) muniti di un'azione continua di $\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$, dove K^{sep} è la chiusura separabile di K.

Esercizio 6.2. Sia S uno schema, C un gruppo abeliano, e $\mathcal{F}$ il prefascio su $S_{\text{ét}}$ che prende il valore C su ogni oggetto di $S_{\text{ét}}$. Descrivere la fascificazione di $\mathcal{F}$.

Esercizio 6.3. Sia X uno schema. Dimostrare che per ogni n la sequenza di fasci

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{G}_m \to 0,$$

detta **sequenza di Kummer**, è esatta *nella topologia fppf*, ovvero in $\mathbf{Ab}\left((\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}}\right)$. Mostrare con un esempio che questo non è necessariamente vero nella topologia étale.

Esercizio 6.4. Un fascio in gruppi abeliani $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(S_{\text{ét}})$ è detto **localmente costante** se esiste un ricoprimento étale $\{U_i \to S\}$ tale che $\mathcal{F}|_{U_i}$ sia un fascio costante (ovvero isomorfo alla fascificazione del prefascio costante $U \mapsto C$ per un certo gruppo abeliano fissato C). Un fascio di gruppi abeliani è detto **finito localmente costante** se è localmente costante ed inoltre prende valori nei gruppi abeliani finiti. Supponiamo che S sia connesso e che $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(S_{\text{ét}})$ sia un fascio finito localmente costante. Mostrare che

1. il gruppo C che appare nella definizione precedente è lo stesso per ogni U_i nel ricoprimento.
2. esiste un morfismo étale finito $U \to S$ tale che $\mathcal{F} = h_U$.

Esercizio 6.5. Consideriamo il prefascio

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & (\mathbf{Sch}/S)^{\text{opp}} & \to & \mathbf{Ab} \\ & T & \mapsto & \Gamma(T, \Omega_{T/S}). \end{array}$$

Dimostrare che $\mathcal{F}$ è un fascio per la topologia étale ma non per la topologia fpqc.

Nota. Può essere più facile trovare un controesempio in caratteristica positiva (considerare un ricoprimento piatto ma non étale della retta affine); chiediamo però di trovare anche un controesempio in caratteristica 0.

Esercizio 6.6 (Proprietà dell'Henselizzazione)**.** In questo esercizio dimostriamo alcune proprietà di base dell'Henselianizzazione. Sentitevi liberi di assumere queste proprietà (piuttosto formali) per svolgere i due successivi esercizi, che sono invece più interessanti.

1. Sia $f : R \to S$ un morfismo di anelli fedelmente piatto. Dimostrare che f è universalmente iniettivo, ovvero che per ogni R-modulo N la mappa $N \to N \otimes_R S$ è iniettiva.

2. Dedurne che se $f : (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ è étale e locale, allora f è iniettiva.

3. Dimostrare che l'henselianizzazione di un anello locale è fedelmente piatta e quindi universalmente iniettiva.

4. Mostrare che se $R \to S$ è fedelmente piatta e S è Noetheriano, allora R è anch'esso Noetheriano (considerare una catena ascendente di ideali in R...). In particolare, se R^h è Noetheriano allora lo è anche R.

5. Sia ora $(R, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano. Ricordare (o dimostrare...) che il completamento $\mathfrak{m}$-adico di R, denotato $\widehat{R}$, è fedelmente piatto su R^h (hint se volete dimostrarlo: il completamento di un anello locale Noetheriano A è fedelmente piatto su A. Controllare che questo enunciato passa al (co)limite). Ricordare anche che il completamento di un anello locale Noetheriano è Noetheriano. Dedurre che R^h è Noetheriano.

6. Usando il fatto che $R \to R^h$ è piatta e che $R/\mathfrak{m} \to R^h/\mathfrak{m}R^h$ è un isomorfismo, mostrare che $R/\mathfrak{m}^n \to R^h/\mathfrak{m}^n R^h$ è un isomorfismo per ogni n. Dedurne che il completamento $\mathfrak{m}$-adico di R è isomorfo al completamento $\mathfrak{m}R^h$-adico di R^h, e quindi che (sempre se R è Noetheriano) c'è un'immersione canonica $R^h \hookrightarrow \widehat{R}$.

Esercizio 6.7. Sia A un anello noetheriano locale, e sia B l'intersezione di tutti gli anelli Henseliani locali $(H, \mathfrak{m}_H)$ tali che[1]

$$A \subseteq H \subseteq \widehat{A}, \quad \mathfrak{m}_A \subseteq \mathfrak{m}_H \subseteq \mathfrak{m}_{\widehat{A}} :$$

dimostrare che allora B è Henseliano, e $A \to B$ è l'henselizzazione di A.

Esercizio 6.8 (Henselizzazione di un DVR)**.** Sia R un DVR con campo delle frazioni K. Sia

$$B = \{x \in \widehat{R} \mid x \text{ separabile su } K\}.$$

1. Dimostrare che B è Henseliano (può essere utile ricordare che il lemma di Hensel classico dimostra che il completamento di un DVR è Henseliano).

2. Dimostrare che B è l'henselianizzazione di R.

7 Esercizi 16 marzo 2019

In questa serie di esercizi, per fascio e prefascio su uno schema X si intendono fasci e prefasci rispetto alla topologia étale.

Esercizio 7.1. Sia M_i un sistema induttivo di A-moduli. Dimostrare che $\varinjlim(N \otimes_A M_i) = N \otimes_A \varinjlim M_i$.

Esercizio 7.2. Con le notazioni utilizzate in classe si dimostri che

$$E_{r+1}^p = \frac{\ker d_r^p}{\operatorname{im} d_r^{p-r}}.$$

[1] queste condizioni hanno senso in virtù della parte (6) dell'esercizio precedente

Esercizio 7.3 (La coomologia di $U(n)$)**.** L'esercizio che segue è semplice e allo stesso tempo un po' macchinoso. Tuttavia ha un suo senso di esistere perché mostra un'applicazione delle sequenze spettrali al calcolo della coomologia di Čech o del gruppo topologico $U(n)$, il gruppo delle isomotrie $\mathbb{C}$-lineari rispetto alla metrica hermitiana standard su $\mathbb{C}^n$. Si dimostra (non in questo esercizio) che la coomologia di un gruppo compatto è sempre un'algebra esterna con generatori in gradi dispari. Il grado di questi generatori si determina per induzione considerando la sequenza spettrale di Leray associata alla fibrazione $U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ data da $g \mapsto g \cdot e_1$. Algebricamente uno si ritrova ad avere una sequenza spettrale che ha la struttura dell'esercizio che segue.

Sia $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)$ una lista di numeri naturali dispari. Per $I \subset \{1, \dots, k\}$ poniamo $d_I = \sum_{i \in I} d_i$ e $\mathbf{d}(h) = card\{I : d_I = h\}$. Definiamo inoltre $M(\mathbf{d}) = \bigoplus M_n$ come lo spazio vettoriale graduato in cui M_h è uguale a $\mathbb{C}^{\mathbf{d}(h)}$, quindi $\dim M(\mathbf{d}) = 2^k$.

Costruiamo adesso per induzione una successione di liste $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots$ di lunghezze diverse nel seguente modo:

La prima lista è $\mathbf{d}^1 = (1)$.

Costruita $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{n-1}$ la lista successiva $\mathbf{b} = \mathbf{d}^n$ è costruita nel seguente modo. Si considerino gli spazi vettoriali graduati $K = M(\mathbf{a}) = \bigoplus K_i$ e $H = M(\mathbf{b}) = \bigoplus H_i$. Esiste un complesso doppio $X^{*,*}$ tale che la coomologia del complesso totale associato è uguale a H, e tale che la sequenza spettrale associata alla filtrazione orizzontale verifica:

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq 0, 2n-1 \\ K_q & \text{se } p = 0, 2n-1 \end{cases}$$

1. Si calcoli $\mathbf{d}^2$.

2. Si calcoli $\mathbf{d}^n$ per ogni n. (si ricordi che le entrate delle liste sono numeri dispari)

Esercizio 7.4. Questo esercizio è quasi banale ma serve a chiarire a chiarire alcune identificazioni che ho usato a lezione. Sia $\Bbbk$ un campo separabilmente chiuso e sia $X = \operatorname{Spec} \Bbbk$ e si consideri X come punto geometrico di se stesso tramite l'identità. Consideriamo la categoria dei prefasci in gruppi abeliani su X

1. Dimostrare che ogni prefascio è un fascio;

2. Dimostrare che $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}(X)$;

3. Dimostrare che $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(X)$ stabilisce una equivalenza tra a categoria dei fasci in gruppi abeliani su X e la categoria dei gruppi abeliani;

4. Sia $\Bbbk \subset K$ una estensione di campi con K seprabilmente chiuso. Sia $W = \operatorname{Spec} K$ e sia $f : W \longrightarrow X$ la mappa indotta dall'inclusione. Dimostrare che $f^{-1}(\mathcal{F})(W) = \mathcal{F}(X)$ e che $f_* \mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(W)$.

5. Sia Y un schema qualsiasi, $j : X \longrightarrow Y$ un punto geometrico di Y e sia $j' = j \circ f$. Se $\mathcal{F}$ è un fascio su Y allora la fibra in X (ovvero la fibra tramite il morfismo j) è uguale alla fibra in W (ovvero la fibra tramite il morfismo j.

In particolare l'ultimo punto rende evidente che la fibra di un punto geometrico dipende solo dall'immagine del punto in Y e non dal campo separabilmente chiuso associato al punto geometrico.

Esercizio 7.5. Sia $f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{G}$ un prefascio su Y e sia $\widetilde{\mathcal{G}}$ il prefascio su X definito da

$$\widetilde{\mathcal{G}}(U) = \varinjlim_{U \longrightarrow f^{-1}V} \mathcal{F}(V).$$

1. Si dimostri che se $\mathcal{G}$ è un fascio allora $\widetilde{\mathcal{G}}$ è un prefascio separato;

2. Fare un esempio in cui $\widetilde{\mathcal{G}}$ non è un fascio;

3. Si dimostri che $f^{-1}(\mathcal{G}^\sharp) = (\widetilde{\mathcal{G}})^\sharp$

4. Se A è un gruppo abeliano e Z è uno schema, sia A_X il fascio associato al prefascio costante $U \mapsto A$ per ogni aperto étale che non sia vuoto. Si dimostri che $f^{-1}A_Y = A_X$ e se ne deduca la costruzione di una mappa $H^*(Y, A_Y) \longrightarrow H^*(X, A_X)$.

Esercizio 7.6. Sia $i : Sh_X \longrightarrow PSh_X$ l'inclusione della categoria dei prefasci in quella dei fasci. Dimostrare che
$$R^p i(\mathcal{F})(U) = H^p(U, \mathcal{F}).$$

Esercizio 7.7. Dimostrare che ogni fascio si può immergere in un fascio iniettivo.

Esercizio 7.8. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo étale e $\mathcal{F}$ un fascio su X. Se $\alpha : V \longrightarrow Y$ è un aperto étale di Y e $\beta : V \longrightarrow X$ è un morfismo tale che $\alpha = f \circ \beta$ allora per quanto abbiamo dimostrato β è a suo étale e ha quindi senso considerare il morfismo β come aperto étale di X e ha senso calcolare $\mathcal{F}(\beta : V \longrightarrow X)$. Definisco un prefascio $\hat{\mathcal{F}}$ su Y ponendo per ogni $\alpha : V \longrightarrow Y$ aperto étale di Y
$$\widehat{\mathcal{F}}(V) = \bigoplus_{\beta} \mathcal{F}(\beta : V \longrightarrow X)$$
dove la somma è fatta su tutte le mappe $\beta : V \longrightarrow X$ tali che $\alpha = f \circ \beta$.

Pongo infine $f_!\mathcal{F}$ il fascio associato a $\widehat{\mathcal{F}}$.

1. Calcolare $\widehat{\mathcal{F}}(U)$ nel caso in cui f sia l'inclusione di un aperto di Zarisky. Dire se è un fascio.

2. Dimostrare che $f_!$ è un aggiunto sinistro di f^{-1}.

3. Sia $g : Y' \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi e siano $g' : X' \longrightarrow X$ e $f' : X' \longrightarrow Y'$ i morifismi ottenuti per pull back. Si dimostri che c'è una equivalenza naturale
$$f^{-1} \circ g_* \simeq g'_* \circ (f')^{-1}$$

4. Con le notazioni del punto precedente dimostrare che c'è una equivalenza naturale
$$f'_! \circ (g')^{-1} \simeq g^{-1} \circ f_!$$

5. Dimostrare che per ogni punto geometrico $\bar{y}$ di Y
$$(f_!\mathcal{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x} \in X_{\bar{y}}} \mathcal{F}_{\bar{x}}$$

6. Dimostrare che f^{-1} porta iniettivi in iniettivi e che $R^p f_! = 0$

8 22.03.2018

Esercizio 8.1. Sia $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ e sia X la cubica nodale $y^2 = x^2(x-1) \subset \mathbb{A}^2_k$. Mostrare che X non è regolare e che $H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_X)$ è diverso da zero.

Indicazione. Primo possibile approccio: considerare il morfismo di normalizzazione $\mathbb{A}^1 \to X$. Secondo possibile approccio: costruire un rivestimento (topologico) di X di grado infinito...

Esercizio 8.2 (Per chi non ha mai visto il teorema di Tsen)**.** Sia k un campo algebricamente chiuso e sia $K = k(x)$. Mostrare che K è C_1.

Indicazione. Stiamo cercando una soluzione ad un'equazione in cui le incognite sono (moralmente) polinomi. Prendiamo invece come incognite i coefficienti. Se lasciamo crescere il grado dei polinomi...

Esercizio 8.3. Sia $p > 2$ un numero primo e sia $E/\mathbb{F}_p$ la curva ellittica di equazione $y^2 = x(x^2+1)$ (come sempre, si intende che E è la chiusura proiettiva della curva affine data da questa equazione).

1. Si descrivano tre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-torsori non banali $X \to E_{\overline{\mathbb{F}_p}}$.
2. Si descriva l'azione del Frobenius su questi torsori.
3. Si descrivano i punti di 2-torsione di $E_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ e l'azione del Frobenius su di essi.

Per il prossimo esercizio abbiamo bisogno di una definizione:

Definizione 8.4. Sia $Y \to X$ un morfismo fedelmente piatto e quasi-compatto, e sia G un gruppo finito di automorfismi che agisce a destra su Y compatibilmente[2] con la proiezione verso X. Il morfismo $Y \to X$ è detto **un rivestimento di Galois di X di gruppo G** se

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \to & Y \times_X Y \\ (g, y) & \mapsto & (yg, y) \end{array}$$

è un isomorfismo.

Esercizio 8.5 (Sequenza spettrale di Hochschild-Serre)**.** Sia $f : Y \to X$ un rivestimento di Galois di gruppo G e sia $\mathcal{F}$ un fascio étale di gruppi abeliani su X.

1. Dimostrare che f è étale (*indicazione*: si potrà ricordare che l'essere étale è una proprietà fpqc-locale, ovvero può essere controllata su un ricoprimento fpqc).
2. Dimostrare che $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)^G$.
3. Dedurne che esiste una sequenza spettrale
$$E_2^{p,q} = H^p\left(G, H^q(Y, \mathcal{F}|_Y)\right) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$
Hint. Bisogna verificare che se $\mathcal{I}$ è un fascio iniettivo su X, allora $\mathcal{I}(Y)$ è aciclico per il funtore $\Gamma(G, -)$ (ovvero il funtore degli invarianti $M \mapsto M^G$). Per questo, si può osservare che il complesso
$$\mathcal{I}(X) \to \mathcal{I}(Y) \to \mathcal{I}(Y \times_X Y) \to \mathcal{I}(Y \times_X Y \times_X Y) \to \cdots$$
è isomorfo al complesso delle catene non-omogenee per l'azione di G su $\mathcal{I}(Y)$. E ora basta osservare che questo complesso calcola la coomologia di Čech per il ricoprimento $Y \to X$...
4. Sia ora X uno schema sul campo k. Per ogni estensione L di k, sia $X_L = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} L$. Per passaggio al limite sulle sequenze del punto precedente, dedurre che c'è una sequenza spettrale
$$E_2^{p,q} = H^p\left(\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K), H^q(X_{K^{\text{sep}}}, \mathcal{F}|_{X_{K^{\text{sep}}}})\right) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Esercizio 8.6. Sia $k = \mathbb{F}_p$ e $X = \mathbb{P}_{1,k}$.

1. Determinare $H^q(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ per ogni $q \geqslant 0$ e per ogni n coprimo con p.
2. Determinare $H^q(X_{\text{ét}}, \mu_n)$ per ogni $q \geqslant 0$ e per ogni n coprimo con p.

[2] ovvero per ogni g in G i due morfismi $Y \to X$ e $Y \xrightarrow{g} Y \to X$ coincidono