Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Insiemi aperti

Definizione 1 (Insieme aperto). *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che A è aperto se per ogni $X \in A$ esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(X) \subset A$. Inoltre, per definizione, l'insieme vuoto $\emptyset$ è un aperto.*

Esempi.

(1) $\mathbb{R}^n$ e l'insieme vuoto sono aperti (come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$).

(2) Dati due numeri reali $a < b$, l'intervallo aperto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\},$$

è un aperto in $\mathbb{R}$.

(3) Dati $X \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, la palla

$$B_r(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| < r\Big\}$$

è un aperto.

Teorema 2. *Siano A_1 un aperto in $\mathbb{R}^n$ e A_2 un aperto in $\mathbb{R}^m$. Allora, il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2$ è un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$.*

Teorema 3 (Unione e intersezione di aperti).

(i) *L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un aperto.*

(ii) *L'unione di una quasiasi famiglia (finita o infinita) di insiemi aperti è un aperto.*

Dimostrazione: Segue direttamente dalla definizione.

Osservazione 4. *In $\mathbb{R}^n$ gli insiemi costituiti da un solo punto non sono aperti.*

Osservazione 5. *In generale, un insieme ottenuto come intersezione infinita di insiemi aperti non è un aperto. Per esempio, dato un $X \in \mathbb{R}^n$,*

$$\bigcap_{n \geq 1} B_{1/n}(X) = \{X\}.$$

Insiemi chiusi

Definizione 6. *Diciamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^d$ è chiuso, se il suo complementare $\mathbb{R}^d \setminus C$ è un aperto.*

Teorema 7 (Unione e intersezione di chiusi).

(i) *L'unione di un numero finito di insiemi chiuso è un chiuso.*

(ii) *L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi chiusi è un chiuso.*

Teorema 8. *Sia C un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti:*

(1) *C è chiuso (ovvero il suo complementare $\mathbb{R}^d \setminus C$ è aperto);*

(2) *ogni successione $X_n \in C$ che converge in $\mathbb{R}^d$ ha come limite un punto di C.*

Esempi.

(1) Per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ l'insieme $\{X\}$ è un chiuso.

(2) Dati $X \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, la palla chiusa

$$\overline{B}_r(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| \le r\Big\}$$

è un chiuso.

(3) Dati $X \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, la sfera

$$\partial B_r(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| = r\Big\}$$

è un chiuso.

(4) Dato un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$\Big\{X \in \mathbb{R}^n \ : \ X \cdot V = 0\Big\}$$

è un chiuso.

(5) Un sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^n$ è un chiuso. Infatti, per ofni sottospazio vettoriale S esistono vettori $V_1, \dots, V_k$ tali che

$$S = \Big\{X \in \mathbb{R}^n \ : \ X \cdot V_1 = X \cdot V_2 = \dots = X \cdot V_k = 0\Big\}.$$

Chiusura, parte interna e bordo

Definizione 9 (Parte interna)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste un unico insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che:*

- *$A \subset \Omega$;*
- *se B è un altro insieme aperto contenuto in Ω, allora $B \subset A$.*

L'insieme A è detto parte interna di Ω.

Definizione 10 (Chiusura)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste un unico insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che:*

- *$\Omega \subset C$;*
- *se D è un altro insieme chiuso che contiene Ω, allora $C \subset D$.*

L'insieme C è detto chiusura di Ω.

Definizione 11 (Bordo/frontiera)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. La frontiera (detta anche bordo) di Ω è definita come*

$$\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}.$$

Proposizione 12. *Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ il bordo $\partial\Omega$ è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. È una conseguenza del lemma seguente. $\square$

Lemma 13. *Siano A un aperto e C un chiuso di $\mathbb{R}^n$.*
Allora, l'insieme $A \setminus C$ è un aperto e l'insieme $C \setminus A$ è un chiuso.

Dimostrazione. Dimostriamo che $C \setminus A$ è un chiuso. Siccome C è un chiuso, possiamo scrivere $C = \mathbb{R}^n \setminus D$, dove D è un aperto. Si ha quindi

$$C \setminus A = \big(\mathbb{R}^n \setminus D\big) \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus (A \cup D).$$

Siccome $A \cup D$ è aperto, abbiamo che $C \setminus A$ è chiuso. □

Teorema 14. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora:*

$$\overline{\Omega} = \Big\{ X \in \mathbb{R}^d \ : \ \textit{esiste una successione di punti } X_n \in \Omega \textit{ tale che } \lim_{n\to\infty} X_n = X \Big\} .$$

Dimostrazione. Dato un punto $X \in \mathbb{R}^d$, dimostreremo che

$$X \in \overline{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste una successione di punti } X_n \in \Omega \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

• Supponiamo prima che $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ con $X_n \in \Omega$. Siccome $\overline{\Omega}$ contiene Ω, abbiamo che $X_n \in \overline{\Omega}$ per ogni n. Siccome $\overline{\Omega}$ è un chiuso, abbiamo che anche il limite X appartiene a $\overline{\Omega}$.

• Supponiamo ora che X sia un punto di $\overline{\Omega}$. Supponiamo per assurdo che non esiste nessuna successione $X_n \in \Omega$ che converge a X. Ma allora, esiste $k \in \mathbb{N}$ abbastanza grande tale che

$$\Omega \cap B_{1/k}(X) = \emptyset.$$

Ma allora, l'insieme

$$\mathbb{R}^d \setminus B_{1/k}(X)$$

è un chiuso che contiene Ω. Siccome $\overline{\Omega}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono Ω, abbiamo che

$$\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \setminus B_{1/k}(X),$$

il che è assurdo perché $X \in \overline{\Omega}$. □

Teorema 15. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora:*

$$\mathring{\Omega} = \Big\{ X \in \Omega \ : \ \textit{esiste un raggio } r > 0 \textit{ tale che } B_r(X) \subset \Omega \Big\} .$$

Dimostrazione. Dato un punto $X \in \mathbb{R}^d$, dimostreremo che

$$X \in \mathring{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste un raggio } r > 0 \text{ tale che } B_r(X) \subset \Omega.$$

• Supponiamo prima che $B_r(X) \subset \Omega$ per un qualche raggio $r > 0$. Siccome $B_r(X)$ è un aperto ed è contenuto in Ω, abbiamo che $B_r(X) \subset \mathring{\Omega}$. In particolare, $X \in \mathring{\Omega}$.

• Supponiamo ora che $X \in \mathring{\Omega}$. Siccome $\mathring{\Omega}$ è un aperto esiste $r > 0$ tale che $B_r(X) \subset \mathring{\Omega}$. Siccome $\mathring{\Omega} \subset \Omega$, abbiamo che $B_r(X) \subset \Omega$. □

Teorema 16. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora:*

$$\partial\Omega = \Big\{ X \in \Omega \ : \ \textit{per ogni raggio } r > 0 \textit{ si ha che } B_r(X) \cap \Omega \neq \emptyset \textit{ e } B_r(X) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega) \neq \emptyset \Big\} .$$

Dimostrazione. Sia $X \in \mathbb{R}^d$. Usando i due teoremi precedenti, dimostreremo che

$$X \in \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad \text{esistono due successioni } X_n \text{ e } Y_n \text{ tali che } \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X \quad \text{e} \quad X_n \in \Omega \\ \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = X \quad \text{e} \quad Y_n \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases} .$$

• Supponiamo che $X \in \partial\Omega$. L'esistenza della successione X_n segue dal fatto che $X \in \overline{\Omega}$. La successione Y_n invece esiste perché altrimenti esisterebbe una palla $B_r(X)$ contenuta in Ω (in tal caso X si avrebbe che $X \in \mathring{\Omega}$).

• Supponiamo che esistono le successioni X_n e Y_n tali che

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n = X \quad \text{e} \quad X_n \in \Omega \ , \\ \lim_{n\to\infty} Y_n = X \quad \text{e} \quad Y_n \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \ . \end{cases}$$

L'esistenza della successione X_n implica che $X \in \overline{\Omega}$. L'esistenza della successione Y_n invece ci dice che non esiste nessuna palla $B_r(X)$ tale per cui $B_r(X) \subset \Omega$. Di conseguenza $X \notin \mathring{\Omega}$. □

Corollario 17. *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$.*

Esercizi

Esercizio 18. *Mostrare che se Ω è un insieme sia aperto che chiuso in $\mathbb{R}^n$, allora $\Omega = \mathbb{R}^n$ oppure $\Omega = \emptyset$.*

Esercizio 19. *Siano C_1 un insieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e C_2 un insieme chiuso di $\mathbb{R}^m$. Mostrare che $C_1 \times C_2$ è chiuso in $\mathbb{R}^{n+m}$.*

Esercizio 20. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Mostrare che il grafico*

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\Big\}$$

è un chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 21. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che l'insieme*

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < f(x)\Big\}$$

è un aperto in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 22. *Sia $B_r(X)$ una palla in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:*

(a) *la chiusura di $B_r(X)$ sia precisamente la palla chiusa*

$$\overline{B}_r(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| \le r\Big\};$$

(b) *il bordo di $B_r(X)$ sia dato da*

$$\partial B_r(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| = r\Big\}.$$

Esercizio 23. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e siano*

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < f(x)\Big\}, \qquad C = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \le f(x)\Big\}.$$

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\Big\}.$$

Si mostri che :

(i) $\Gamma = \partial A = \partial C$;

(ii) $\overline{A} = C$ *and* $\mathring{C} = A$.

Esercizio 24. *Trovare* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *tale che:*

(1) $\mathring{\Omega} = \emptyset$ *e* $\Omega \neq \emptyset$.

(2) $\partial\Omega = B_1(0)$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

(3) $\partial\Omega = \mathbb{R}^d$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

(4) $\partial\Omega = \emptyset$ *e* $\Omega \neq \emptyset$.

(5) $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^d$ *e* $\mathring{\Omega} = \emptyset$.

Esercizio 25.

(1) *È vero che per ogni* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *vale l'uguaglianza* $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ *?*

(2) *È vero che per ogni* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *vale l'uguaglianza* $\partial\Omega = \partial\mathring{\Omega}$ *?*