Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

III foglio di esercizi: primi esercizi sulla convoluzione tra funzioni

---

Legenda: • esercizi impegnativi, ∘ di approfondimento e più teorici, ⌒ esercizi 'ponte'.

Legenda per i temi di esame: AACnEm ovvero AAExnEm, AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C per prove in itinere (compitini), Ex per testi di appelli, n il numero del compitino o dell'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio.

ESERCIZIO n.1 a- Sia σ funzione misurabile non negativa per cui $\sigma(x) = \sigma(-x)$ q.o. .
Allora se f, g sono non negative misurabili si ha: $\int f \cdot (\sigma * g) \; = \; \int (f * \sigma) \cdot g$.
b- Cosa sostituire alla non negatività affinchè l'identità sia ancora sensata e vera ?

ESERCIZIO n.2 Non vi è alcuna f sommabile per cui $f * g = g$ per ogni g.
[Se f è sommabile allora $F(E) = \int_E f$ è piccolo se ...].

11Ex1E7a Dimostrare che $C_c^\infty(\mathbf{R})$ (funzioni con derivata di ogni ordine e a supporto compatto) è denso in $C_0(\mathbf{R})$ (continue infinitesime all'infinito) con la norma uniforme.

ESERCIZIO n.3 a- Lo spazio normato $(C[a;b], \sup_{[a;b]} |f|)$ è separabile.
b- Si deduca che $L^p(\mathbf{R})$, $p < \infty$ è separabile.

ESERCIZIO 4a- Sia f sommabile sui compatti e sia g funzione sommabile con supporto compatto. Si mostri che è ben definita la convoluzione $f * g$.
b- Siano $f,\ g$ per cui $f(x) \cdot g(y) = 0$ p.q.o. $(x, y) \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ t.c. $|x - y| \geq \varepsilon > 0$. Si mostri che è ben definita la convoluzione $f * g$.

09Ex1E3 Siano $f,\ g$ funzioni continue su $\mathbf{R}$ tali che f è Lipschitziana e $\|g\|_1 < \infty$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione Lipschitziana la cui costante di Lipschitz $Lip(f * g) \leq Lip(f) \cdot \|g\|_1$.

ESERCIZIO 5 Si trovi f sommabile per cui $f * f$ non abbia rappresentanti continui.

12Ex3E6 a) Siano $f,\ g$ funzioni in $L^1(\mathbf{R})$ con f funzione α-Hölderiana (cioè esiste una costante c tale che $|f(x) - f(y))| \leq c|x - y|^\alpha$ per ogni $x,\ y \in \mathbf{R}$). Dimostrare che il prodotto di convoluzione $f * g(x)$ è una funzione α-Hölderiana.
• b) Trovare $f,\ g \in L^1(\mathbf{R})$ con f continua tali che $f * g$ non è α-Hölderiana per alcun $\alpha > 0$.

∘ ⌒ ESERCIZIO n.6 a- Sia $\tau_h(f)(x) = f(x + h)$ per $f \in C(\mathbf{R}^n)$. Si provi che τ_h si estende ad un operatore lineare e continuo da $L^p(\mathbf{R})$, in se.
b- Posto $C = \{f \in L^p : \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{|h| \leq \delta} \|\tau(f) - f\|_p = 0\}$, $p < \infty$, si provi che C è un sottospazio vettoriale di L^p, e che è chiuso.
c- Si provi che C contiene le funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita. Si deduca quindi che $\forall f \in L^p(\mathbf{R}^n) \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{|h| \leq \delta} \int_{\mathbf{R}} |f(x) - f(x + h)|^p dx = 0$

ESERCIZIO n. 7a- Se $1/p + 1/q = 1$, anche infiniti, allora se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ si ha che $f * g$ è uniformemente continua e limitata e $|f * g|_\infty \leq |f|_p |g|_q$.
• b- Se sia $1 < p,\ q < \infty$ allora $f * g$ è anche infinitesima all'infinito.