Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

VI foglio di esercizi: proiettori ortogonali in spazi di Hilbert

---

Legenda: • esercizi più impegnativi, ◦ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌒ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

11C1E1 Sia X il sottospazio di $L^2(-1,1)$ dato dalle funzioni della forma at^2+bt^3 con $a, b \in \mathbf{R}$. trovare una base ortonormale di X e scrivere esplicitamente l'operatore di proiezione su X.

11Ex1E4 Sia $I := [-1,1]$, e sia W il sottospazio di $L^2(I)$ dato dalle funzioni pari (vale a dire le funzioni f tali che $f(x) = f(-x)$ per quasi ogni x).

a) Dimostrare che W è un sottospazio chiuso di $L^2(I)$.

b) Determinare $W^\perp$.

c) Scrivere in forma esplicita l'operatore di proiezione su W.

12Ex1E5 a) Sia Q il quadrato $[0;1]^2$, e sia X il sottospazio di $L^2(Q)$ formato dalle funzioni costanti rispetto alla seconda variabile. Dimostrare che è chiuso in $L^2(Q)$.
b) Determinare il proiettore ortogonale su X e il complemento ortogonale $X^\perp$.

ESERCIZIO n.1 a -Sia $Y = \{f \in L^2(0;1) : \int f = 0\}$. Si provi che è un sottospazio chiuso, e si determinino i proiettori su Y e su $Y^\perp$.
b- Sia $Y = \{f \in L^2(-1;1) : f(x) = f(-x) \text{ q.o. }\}$. Si provi che è un sottospazio chiuso, e si determinino i proiettori su Y e su $Y^\perp$.

◦ • ESERCIZIO n.2 (Proiezione su convessi chiusi) Sia C un sottoinsieme convesso chiuso di uno spazio di Hilbert H, si ha:
a- per ogni $x \in H$ vi è un unico $c \in C$ t.c. $|x - c| = \min_{y\in c} |x - y|$.
Tale c si indica con $P_C(x)$, e si dice proiezione "ortogonale" di x su C
b- Tale c è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} Re(x - c \cdot y - c) \le 0 \quad y \in C \\ \\ c \in C \end{cases}$$

c- Ogni convesso chiuso di un Hilbert è separato strettamente da ogni punto esterno per mezzo di un iperpiano (traslato del nucleo di un funzionale lineare e continuo).
d- In un Hilbert ogni convesso chiuso è intersezione di semispazi chiusi.
e- $|P_C(x) - P_C(z)| \le |x - z|$.

11Ex4E7 Sia K l'insieme delle funzioni u in $L^2(0,1)$ tali che $u \geq 0$ quasi ovunque.

a) Dimostrare che K è convesso e chiuso in $L^2(0,1)$.

b) Dimostrare che la proiezione su K è l'applicazione T che ad ogni $f \in L^2(0,1)$ associa la funzione Tf data da

$$[Tf](x) := \max\{f(x), 0\}\,.$$

ESERCIZIO n. 3 (cfr. 12Ex5E5) a- Si provi che $B = \{f \in L^\infty(0;1) : |f|_{L^\infty} \leq 1\}$ è un convesso chiuso in $L^2(0;1)$.
• b- Si trovi il proiettore P_B
[Dalla diseguaglianza che caratterizza il proiettore si deduca che $|P(f) - f|_{L^1} \leq ((f - P_f) \cdot P(f))_{L^2}$, quindi vi è eguaglianza e si passa ad una equaglianza quasi ovunque ...]

$\frown$ ∘ ESERCIZIO n. 4 a- Se $f \in L^q$, $1 \leq q \leq \infty$ allora $|f|_{L^q} = \sup\{\int fg : |g|_{L^p} \leq 1\}$, $p = \frac{q}{q-1}$.
È un massimo per $q < \infty$ con unico punto di massimo.
• b- Data una qualsiasi f misurabile allora $f \in L^q$, $q < \infty$ se e solo se $S =: \sup\{\int fg : |g|_{L^p} \leq 1\} < \infty$, $p = \frac{q}{q-1}$, e $|f|_q = S$. [Ci si riduca al caso non negativo, si usino le troncate di f e quindi Beppo-Levi].
• c- Si provi che $B = \{f \in L^p(0;1) : |f|_{L^p} \leq 1\}$ è un convesso chiuso in $L^2(0;1)$, $2 \leq p$.
•• d- Si trovi una relazione tra $f(x)$ e $P_B(f)(x)$, per quasi ogni x. [Dalla diseguaglianza che caratterizza il proiettore si deduca da b) che $|P(f) - f|_{L^q} \leq ((f - P_f) \cdot P(f))_{L^2}$, quindi vi è eguaglianza e si passa ad una eguaglianza quasi ovunque grazie ad a) ...]
e- Si provi il punto b) nel caso in cui $q = \infty$.

∘ ESERCIZIO n.5 a- Sia E un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert H allora $E^\perp$ è un sottospazio vettoriale chiuso.
b- Sia V un sottospazio di Hilbert (chiuso) di uno spazio di Hilbert H e sia P_V la proiezione di minima norma su V.
c- Si provi che $P_V(x)$ è l'unica soluzione di $x - z \perp V$ e $z \in V$
d- $H = V \bigoplus V^\perp$, $V \perp V^\perp$, V e $V^\perp$ chiusi (somma diretta Hilbertiana).
e- Si provi che P_V è lineare e continuo $[(x \cdot P_V(x)) = |P_V(x)|^2]$
f - $\min_{v \in V} |v - x| = \max_{w \in V^\perp,\ |w|=1} (x \cdot w)$
h- Se $V = \overline{\text{vectorspan}(e_n : n \in \mathbf{N})}$ per un sistema ortonormale $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ allora $|P_V(x)|^2 = \sum |(x \cdot e_n)|^2$.

ESERCIZIO n.6 Sia E un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert H allora $E^{\perp\perp} = \overline{\text{vectorspan} E}$.

∘ ESERCIZIO n.7 a- Sia X uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff e Y un suo sottospazio di dimensione finita d. Allora ogni isomorfismo algebrico da $\mathbf{R}^n$ in Y è un omeomorfismo, e Y risulta chiuso in X
[cfr. W. Rudin "Functional Analysis" Th. 1.21 pag. 16].
b- Si provi direttamente che un sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert H è chiuso.

∘ ESERCIZIO n. 8 Siano V e W sottospazi vettoriali chiusi di un Hilbert H.
a- $P_V P_W = P_W P_V \iff V = (V \cap W) \bigoplus (V \cap W^\perp) \iff P_V P_W = P_{V \cap W}$ e $V + W$ chiuso, nel caso si esprima P_{V+W} in termini degli altri proiettori.
b- $P_V P_W = \mathbf{0} \iff V \subseteq W^\perp \iff V + W$ chiuso e $P_{V+W} = P_V + P_W$.

$\circ \frown$ ESERCIZIO n.9 Sia T un operatore lineare e continuo su uno spazio di Hilbert H, per cui $T^2 = T$ (proiettore con proiezione su ImT "parallela" a $KerT$).
a- Si provi che H è somma diretta algebrica di $KerT$ e ImT.
b - Si provi che ImT è un sottospazio chiuso e quindi H è somma diretta dei sottospazi chiusi $KerT$ e ImT (somma diretta topologica).
c- Si provi che $|T(x)| \geq |x - P_{KerT}(x)| = dist(x, KerT)$
d- Un proiettore continuo T è un proiettore ortogonale sulla sua immagine se e solo se $(Tx \cdot y) = (x \cdot Ty)$.