Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

X foglio di esercizi: applicazioni per le serie di Fourier di funzioni regolari a tratti

---

Testi da cui si è preso spunto: H.Dym H.P.Mc Kean "Fourier series and integrals":Ch. 1. A.A.Kirillov A.D.Gvisiani "Teoremi e problemi dell'analisi funzionale":es. 645-650, 652, 653. A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" Ch. 12.1-12.3; M.Reed B. Simon "Methods of modern Mathematical Physics,, Vol 1 cap. 1, 2;
H.F.Weinberger "A first course in Partial Differential Equations with complex variables and transform methodods": Ch. IV, V, VI, VII.
S.Salza G.Verzini "Equazioni a derivate parziali: complementi ed esercizi": cap 2.2.1: pb. n.2.1-2.3, 2.5, 2.6, 2.8; cap 2.2.3: pb. 2.18; cap 2.2.5 pb.2.24, 2.25; cap 2.3: es.3.3, 3.4, 3.6; cap. 4.2.1: pb. 2.1, 2.5, 2.10; cap. 4.3: es. 3.1-3.5.

Legenda: • esercizi più impegnativi, ∘ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌒ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

NOTA: criteri identici a quelli enunciati negli esercizi da 1 a 3 possono essere estesi alle funzioni a *variazione limitata*, teorema di Dirichlet-Jordan, usando, piuttosto che le considerazioni elementari degli esercizi 1 e 3, i nuclei di Fejer e il criterio di convergenza di Hardy per serie con addendi $O(n^{-1})$ e medie delle somme parziali convergenti [cfr. VIII Foglio, A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" Theorems 12.45, 12.47, 12.48].

ESERCIZIO n.1 a- Analogamente a Es.2c del Foglio VIII (conseguenze della formula di somma "per parti") dimostrare che data una successione di funzioni $a_k(t)$, $t \in I$, $k \in \mathbf{N}$,

- $\sup_{t,k} |a_k(t)| \leq C < \infty$,   - $\sup_t \sum |a_k - a_{k+1}| \leq C < \infty$,

e una successione $b_k(x)$, $k \in \mathbf{N}$

-con serie convergente uniformemente per $x \in C$, allora:

$\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k(t)b_k(x)$ converge uniformemente in $I \times C$.

Se poi - $\lim_{t\to 0} a_k(t) = 0$ allora:

$\lim_{t\to 0} \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k(t)b_k(x) \; = \; 0$ uniformemente per $x \in C$

b- Se $g(x)$ con coefficienti di Fourier c_k, $k \in \mathbf{N}$ ha serie di Fourier convergente in x_0, cioè $\sum_k c_k e^{ikx_0} = L(x_0) \in \mathbf{R}$, allora

$$\sum_k c_k e^{-k^2 t + ikx_0} =: u(t, x_0) \text{ converge }, \quad \lim_{t\to 0} u(t, x_0) = L$$

c- Se la convergenza della serie di g è uniforme al variare di x_0 in C tali sono le altre convergenze.

ESERCIZIO n.2 a- Se $u_0(x)$ su $[-\pi;\pi]$ con coefficienti di Fourier c_k^0, $k \in \mathbf{N}$, è continua su un numero finito di intervalli chiusi ed ivi C^1 allora per la soluzione periodica $u(t,x) \in C^\infty(]0,\infty[\times[-\pi;\pi])$ dell'equazione del calore generata per serie di Fourier da u_0 si ha:

$$u(t,x) = \sum_k c_k^0 e^{-k^2 t + ikx} \to \frac{u_0(x^+) + u_0(x^-)}{2} \ , \quad t \to 0$$

b- La convergenza è uniforme sui compatti contenuti nei complementari dell'unione di intorni dei punti di discontinuità (estremi compresi). Se ne deduca inoltre che se A è un aperto di $\mathbf{R}$ contenente i punti di discontinuità di u_0 allora $u(t,x) \in C([0;\infty[) \times ([-\pi;\pi] \setminus A))$.

$\circ$ ESERCIZIO n.3 Nelle ipotesi e notazioni del precedente esercizio il problema

$$\begin{cases} v_t(t,x) \ = \ v_{xx}(t,x) \\ \\ v \in C^2(]0;+\infty[\times[-\pi;\pi]) \bigcap L^\infty([0;1]\times[-\pi;\pi]) \ \ C^1-\text{periodica in } x \\ \\ \lim_{t\to 0^+} v(t,x) = \frac{u_0(x^+)+u_0(x^-)}{2} \end{cases}$$

ha unica soluzione, anche $C^\infty(]0;+\infty[\times[-\pi;\pi])$ e $C([0;\infty[\times([-\pi;\pi] \setminus A))$, con A aperto di $\mathbf{R}$ contenente i punti di discontinuità di u_0 .

ESERCIZIO n. 4 Si trovino eventuali soluzioni per i seguenti problemi ai dati iniziali.

$$a - \begin{cases} u_t(t,x) \ = \ u_{xx}(t,x) \\ \\ \\ u \in C([0;+\infty[\times[0;2] \setminus A) \\ A \quad \text{intorno di } \ \frac{1}{2} \ , \ \ \frac{3}{2} \\ u \in C^\infty(]0;+\infty[\times[0;2]) \\ \text{per} \quad t>0 \quad \text{periodica in} \quad x \\ \\ u(0,x) = \chi_{[\frac{1}{2};\frac{3}{2}]}(x) \ \ x \neq \frac{1}{2} \ , \ \ \frac{3}{2} \end{cases}
\qquad
b - \begin{cases} u_t(t,x) \ = \ u_{xx}(t,x) \\ \\ \\ u \in C([0;+\infty[\times[0;2\pi] \setminus A) \\ A \quad \text{intorno di } \ 0 \ , \ \ 2\pi \\ u \in C^\infty(]0;+\infty[\times[0;2\pi]) \\ \text{per} \quad t>0 \quad \text{periodica in} \quad x \\ \\ u(0,x) = x \ \ 0<x<2\pi \end{cases}$$

$\bullet$ ESERCIZIO n. 5 Si trovino eventuali soluzioni per
$$\begin{cases} u_t(t,x) \ = \ u_{xx}(t,x) \\ \\ u(t,0) = u(t,2\pi) - 2\pi t, \\ u_x(t,0) = u_x(t,2\pi) \\ \\ u \in C([0;+\infty[\times[0;2\pi]) \\ u \in C^1([0;+\infty[\times]0;2\pi[) \\ u \in C^\infty(]0;+\infty[\times[0;2\pi]) \\ \\ u(0,x) = 0, \quad x \in [0;2\pi] \end{cases}$$
e se ne discuta la massima regolarità.
