Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XV foglio di esercizi: superficie immerse, tangente, mappe regolari, bordo.

Legenda: • esercizi più impegnativi, ◦ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌒ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

09C2E4 Sia S l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ con norma euclidea uguale a 1. Mostrare che S è una superficie compatta senza bordo di dimensione $\frac{1}{2}(n^2+n-2)$ in $\mathbf{R^{n\times n}}$.

⌒ 09Ex3E4 Si consideri la mappa $f : \mathbf{R^{n\times n}} \to \mathbf{R^{n\times n}}$ data da $f : A \mapsto \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

a) Calcolare $df(A)$;
b) calcolare il rango di $df(A)$ per $n = 2$ e $A = I$;
c) calcolare il rango di $df(A)$ per $n = 2$ e A diagonale.

⌒ 09Ex5E6 Detto X lo spazio delle matrici reali $n \times n$ con $n \geq 2$, si consideri la mappa $f : X \to X$ data da $f(A) := A + A^t + A^tA$.

a) Calcolare $df(A)$ per ogni $A \in X$ e dimostrare che ha rango minore o uguale a $\frac{1}{2}n(n+1)$.
b) Detta I la matrice identità, calcolare il rango di $Df(aI)$ per ogni $a \in \mathbf{R}$.
c) Dimostrare che $\{A \in X : \ f(A) = 0\}$ è una superfice regolare di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$.

⌒ 11Ex2E6 Sia X lo spazio delle matrici reali simmetriche $n \times n$, e sia $f : \mathbf{R^{n\times n}} \to \mathbf{X}$ la mappa data da $f : A \mapsto A^tA + A + A^t$.

a) Calcolare $df(A)$.
b) Dimostrare che se $f(A) = 0$ allora $A + I$ è una matrice invertibile.
c) Dimostrare che $S := f^{-1}(0)$ è una superficie senza bordo di classe C^∞ e dimensione $d := \frac{1}{2}n(n-1)$ in $\mathbf{R^{n\times n}}$.

09C2E2 Si consideri la mappa $f : \mathbf{R^{n\times n}} \to \mathbf{R^{n\times n}}$ data da $f : A \mapsto A^2$.

a) Calcolare $df(A)$;
b) calcolare il rango di $df(A)$ per $n = 2$ e $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

⌒ 12C2E4 Dati m, n interi tali che $0 < n \leq m$, sia S l'insieme delle matrici $X \in \mathbf{R^{m\times n}}$ tali che $X^tX = I$. Dimostrare che S è una superficie di dimensione $d := \frac{1}{2}(2m-n-1)n$, senza bordo e di classe C^∞.

12Ex5E1 Mostrare che la frontiera di un quadrato nel piano non è una curva di classe C^1 (intesa come superficie di dimensione 1, con o senza bordo).

◦ 09C2E6 Sia S una superficie connessa, senza bordo, di dimensione d e classe C^1 in $\mathbf{R^n}$. Dimostrare quanto segue:

a) data $f : S \to \mathbf{R}$ di classe C^1 tale che $df(x) = 0$ per ogni $x \in S$, allora f è costante;

b) se esiste $v \in \mathbf{R^n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che $v \perp Tan(S, x)$ per ogni $x \in S$, allora S è contenuta in un iperpiano affine perpendicolare a v.

$\circ$ 09Ex4E6 Sia S una superfice senza bordo di classe C^1 e dimensione d in $\mathbf{R^n}$. Data $g : S \to \mathbf{R}$ funzione di classe C^1, poniamo $N := g^{-1}(0)$. Dimostrare che se $dg(x) \neq 0$ per ogni $x \in N$ allora N è una superfice senza bordo di classe C^1 e dimensione $d - 1$.

11C2E6 Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbf{R^3}$ tali che $x^3 - 3(y^4 + z^4)x + y^{12} + z^{12} = 0$.

a) Dimostrare che la proiezione di S sul piano yz è surgettiva.

b) Dimostrare che per i punti di S si ha $x = O(y^2 + z^2)$ per $(y, z) \to 0$.

c) Dire se S è una superficie regolare o meno.

$\bullet$ 11Ex1E8 Sia S una superfice senza bordo di dimensione d e classe C^k in $\mathbf{R^n}$, e sia $f : S \to \mathbf{R^m}$ iniettiva, di classe C^k con $df(x) : Tan(S, x) \to \mathbf{R^m}$, $x \in S$ di rango d.

a) Dimostrare che se S è compatta allora $f(S)$ è una superfice senza bordo di dimensione d e classe C^k in $\mathbf{R^m}$.

b) Far vedere che l'ipotesi di compattezza nell'enunciato a) è necessaria e proporre un'ipotesi aggiuntiva su f che permetta di rimuoverla.

$\frown$, $\circ$ 11Ex4E4 Per ogni $i = 1, 2, 3$ sia S_i una superficie senza bordo di classe C^1 e dimensione d_i in $\mathbf{R^{n_i}}$, e siano $g_1 : S_1 \to S_2$ e $g_2 : S_2 \to S_3$ mappe di classe C^1. Dimostrare che $g := g_2 \circ g_1 : S_1 \to S_3$ è una mappa di classe C^1 e che per ogni $x \in S_1$ si ha

$$dg(x) = dg_2(g_1(x)) \circ dg_1(x)$$

$\bullet$, $\circ$ 11Ex4E8 Sia $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^n}$ (con $n \geq 2$) una mappa di classe C^1 tale che:

(i) g è periodica di periodo 1 in ciascuna variabile;

(ii) $\nabla g(x)$ ha rango 2 in tutti i punti;

(iii) g è iniettiva su $[0, 1) \times [0, 1)$.

a) Dimostrare che $S := g(\mathbf{R^2})$ è una 2-superficie compatta e senza bordo di classe C^1.

b) Dire se l'enunciato a) resta valido rimuovendo l'ipotesi (iii).

12Ex1E4 Sia S una superficie senza bordo di dimensione d in $\mathbf{R^n}$, e sia D un sottoinsieme di S tale che $S \setminus D$ è ancora una superficie senza bordo di dimensione d. Dimostrare che D è chiuso in S.

[Osservazione: ai suggerisce di usare il seguente fatto noto: una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbf{R^d}$ in $\mathbf{R^d}$ con differenziale di rango massimo in ogni punto è aperta].

$\bullet$ 12Ex3E5 Dato $n \geq 2$, sia S l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ tali che

$|x| = |y| = 2\,, \quad |x - y| = 3.$

a) Dimostrare che S è una superficie senza bordo.

b) Cosa succede sostituendo la condizione $|x - y| = 3$ con $|x - y| = 4$?

12Ex2E7 Dato $n \geq 1$, sia S l'insieme dei punti $(x', x'') \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ tali che $|x'| = |x''|$.

a) Dimostrare che $S \setminus \{(0, 0)\}$ è una superficie regolare senza bordo di dimensione $2n - 1$.

b) Determinare l'insieme S_0 dei vettori $v \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ della forma $v = \dot{\gamma}(0)$ con $\gamma : [0, \delta) \to S$ cammino di classe C^1 tale che $\gamma(0) = (0, 0)$.

c) Dimostrare che S non è una superficie di classe C^1.

• 12Ex1E8 Sia C una curva (cioè una superficie di dimensione 1) senza bordo, compatta e di classe C^1 contenuta nel semipiano aperto $\mathbf{R} \times (\mathbf{0}, +\infty)$, e dati $m, n > 1$ sia

$$S := \{(x, y) \in \mathbf{R^m} \times \mathbf{R^n} : \ (|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \in \mathbf{C}\,\} \,.$$

a) Dimostrare che se C è contenuta nel quadrante aperto $Q := (0, +\infty)^2$ allora S è una superficie di dimensione $m + n - 1$ compatta, senza bordo e di classe C^1.

b) Supponiamo che C intersechi l'asse $R := \{0\} \times \mathbf{R}$. Far vedere che S è una superficie di dimensione $m + n - 1$ se e solo se la retta tangente a C in ogni punto di intersezione con R è ortogonale a R.