Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XX foglio di esercizi: funzioni armoniche

Legenda: • esercizi più impegnativi, ∘ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌢ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

09C2E5 a) Sia $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 tale che sia u e u^2 sono funzioni armoniche. Dimostrare che u è costante.
b) Dire se vale lo stesso risultato per funzioni u a valori complessi.

09C2E8 Sia $D := \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$, e sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione 2π-periodica di classe C^1 con media nulla. Per ogni intero $k = 1, 2, \ldots$, indichiamo con u_k la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } D, \\ u(e^{i\theta}) = f(k\theta) & \text{per } 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Dimostrare che esiste una costante c tale che $|u_k(x)| \le c|x|^k$ per ogni $x \in D$ ed ogni k.

• 09Ex2E8 Indichiamo con D e D' i dischi chiusi in $\mathbf{R}^2$ di centro 0 e raggi 1 e 1/2 rispettivamente, e con $\|f\|_A$ la norma del'estremo superiore di $|f|$ sull'insieme A.
a) Dimostrare che esiste una costante C tale che per ogni funzione armonica u definita in un intorno di D si ha $\|\nabla u\|_{D'} \le C\, \|u\|_{\partial D}$.
b) Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia u_n una successione di funzioni armoniche equilimitate su A. Dimostrare che per ogni compatto K contenuto in A esiste una sottosuccessione di u_n che converge uniformemente su K.

09Ex3E2 Sia u una funzione armonica su $\mathbf{R}^n$. Dimostrare quanto segue:
a) se $\|u\|_1 < +\infty$ allora u è identicamente nulla;
b) se $\|u\|_p < +\infty$ per qualche $p < +\infty$ allora u è identicamente nulla.

09Ex4E5 Si consideri una successione di funzioni armoniche $f_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ che convergono uniformemente sui compatti ad una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Dimostrare che f è armonica.

• 09Ex4E8 Sia Ω il semipiano dei punti $(x, s) \in \mathbf{R}^2$ tali che $s > 0$, e sia $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua che tende a 0 all'infinito. Consideriamo quindi il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per ogni } (x,s) \in \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in \mathbf{R}, \\ u(x,s) \to 0 & \text{per } |(x,s)| \to +\infty. \end{cases} \qquad (*)$$

a) Dimostrare che $(*)$ ammette al più una soluzione u continua su $\bar{\Omega}$ e di classe C^2 su Ω.
b) Trovare un'espressione esplicita per u.
[Osservazione:Non si richiede una completa giustificazione: detta $v(y,s)$ la trasformata di Fourier di $u(x,s)$ rispetto alla variabile x, riscrivere l'equazione $\Delta u = 0$ in termini di v].

09Ex5E8 Sia $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione armonica, e sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2.
a) Dimostrare che se f è affine allora $f \circ u$ è armonica.
b) Supponendo che $f \circ u$ sia armonica e che il gradiente di u non si annulli mai, dimostrare che f coincide sull'immagine di u con una funzione affine.
c) Cosa succede al punto b) rimuovendo l'ipotesi che il gradiente di u non si annulli mai?

11C2E7 a) Trovare una funzione v su $\mathbf{R}^2$ tale che $\Delta v(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
b) Detto D il disco aperto di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbf{R}^2$, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = x_1 x_2 & \text{in } D, \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial D. \end{cases}$$

11Ex1E6 Siano f ed f_n con $n = 1, 2, \dots$ funzioni continue su $\mathbf{R}^m$ tali che f_n converge ad f in $L^1(B)$ per ogni palla B centrata nell'origine.
a) Dimostrare che f_n converge ad f in $L^1(E)$ per ogni insieme misurabile e limitato E.
b) Dimostrare che se le funzioni f_n sono armoniche allora anche f è armonica.

11Ex2E5 a) Date $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ed $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^2, calcolare $\Delta(f \circ u)$.
b) Trovare tutte le funzioni f tali che $f \circ u$ è armonica per ogni u armonica.

11Ex3E5 Dato $d \geq 3$, trovare tutte le funzioni $u : \mathbf{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ che sono armoniche e radiali.

11Ex5E3 Sia A un aperto di $\mathbf{R}^d$ e sia $F : A \times [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua ed armonica rispetto alla prima variabile (vale a dire che $F(\cdot, t)$ è armonica per ogni $t \in [0,1]$). Si ponga

$$f(x) := \int_0^1 F(x,t)\, dt \quad \text{per ogni} \quad x \in A.$$

Dimostrare che f è una funzione armonica su A.

11Ex5E7 Sia D il disco di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbf{R}^2$. Risolvere l'equazione $\Delta u = 0$ su D con la condizione al bordo $u = u_0$ dove $u_0(x) := (x_1 x_2)^3$.

12C2E5 Sia p un polinomio di grado d su $\mathbf{R}^2$, sia D il disco chiuso di centro 0 e raggio 1 in $\mathbf{R}^2$, e sia u la funzione su D che coincide con p su ∂D ed è armonica all'interno di D. Dimostrare che u è un polinomio di grado minore o uguale a d.

• 12C2E8 a) Data f funzione armonica su $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, dimostrare che esiste una costante c tale che, per ogni $r > 0$,

$$\frac{d}{dr} \fint_{\partial B(0,r)} f \, d\sigma_{n-1} = \frac{c}{r^{n-1}}\,.$$

b) Far vedere con un esempio che la costante c può essere diversa da zero.
c) Dimostrare che se u si estende per continuità in 0 allora 0 è una *singolarità eliminabile*, vale a dire che u si estende come funzione armonica a tutto $\mathbf{R}^n$.
d) Dire se la conclusione al punto c) vale anche sotto ipotesi più deboli, ad esempio che u sia limitata in un intorno di 0.

12Ex1E6 a) Indichiamo con $B(r)$ la palla aperta di centro 0 e raggio r in $\mathbf{R}^n$. Dimostrare che per ogni $1 > r > 0$ esiste una costante finita C tale che per ogni funzione armonica f su $B(1)$ si ha

$$\|f\|_{L^\infty(B(r))} \leq C\|f\|_{L^1(B(1))}\,.$$

b) Far vedere (almeno quando $n = 2$) che per $r = 1$ tale costante non esiste.

• 12Ex2E8 Dato $r \in (0, 1)$, indichiamo con Ω la corona circolare formata dai punti $x \in \mathbf{R}^2$ tali che $r < |x| < 1$, e data $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ funzione continua di periodo 2π consideriamo il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(re^{i\theta}) = 0 & \text{per } \theta \in [0, 2\pi] \\ u(e^{i\theta}) = g(\theta) & \text{per } \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

dove, al solito, abbiamo identificato $\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{C}$.

a) Trovare esplicitamente una soluzione del problema quando $g(\theta) = e^{in\theta}$ con $n \in \mathbf{Z}$.
b) Trovare la soluzione del problema in termini dei coefficienti di Fourier di g, e dire sotto quali ipotesi tale soluzione risulta essere continua su $\overline{\Omega}$.

12Ex3E8 a) Sia $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una mappa olomorfa (avendo identificato $\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{C}$) e sia $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione armonica. Dimostrare che la funzione composta $u \circ \varphi$ è armonica.
b) Sia $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una mappa una mappa di classe C^2 tale che per ogni funzione armonica $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione composta $u \circ \varphi$ è armonica. Dimostrare che φ è olomorfa o antiolomorfa. [Suggerimento: dimostrare per prima cosa che φ è armonica].

12Ex4E7 Posto $D = \mathbf{R} \times [0; 2\pi]$, trovare tutte le funzioni continue $u : D \to \mathbf{R}$ che son armoniche all'interno di D e nulle su ∂D, e soddisfano la condizione:

$$\|u(x, \cdot)\|_2 \;=\; O(e^{|x|}) \quad \text{per} \quad |x| \to \infty.$$

[Suggerimento: scrivere u in serie di seni rispetto alla variabile y].