

AVVERTENZA: la presente nota presuppone la familiarità con la nozione generale di spazio metrico. Si mostrano solo due nozioni astratte della teoria degli spazi metrici di uso comune per la convergenza negli spazi L^p .

NOTAZIONE 1: dato uno spazio metrico (X, d) con $B_d(x, r)$ si intende $\{y \in X : d(x, y) < r\}$ la *palla aperta di centro $x \in X$ e raggio r* .

Con $\bar{B}_d(x, r)$ si intende $\{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ la *palla chiusa di centro $x \in X$ e raggio r* .

NOTA: in generale la palla chiusa non è la chiusura della palla aperta: $\overline{B_d(x, r)} \subset \bar{B}_d(x, r)$.

TEOREMA 1 Sia (X, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione di elementi di X .

$$\exists x \in X \quad d(x_n, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \iff \quad \exists x \in X \quad \forall (x_{n_k}) \exists (x_{n_{k_h}}) \rightarrow_d x$$

DIMOSTRAZIONE:

\Rightarrow Il limite di (x_n) è limite di ogni sottosuccessione e quindi di ogni ulteriore sottosuccessione.

\Leftarrow Il candidato limite è x , limite comune di tutte le sottosuccessioni di sottosuccessioni di (x_n) . Se questa non convergesse a x

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \exists n_k > n_{k-1} \quad d(x_{n_k}, x) > \varepsilon$$

Quindi ogni sottosuccessione di (x_{n_k}) avrebbe distanza da x maggiore di ε contro l'ipotesi che una di essa vi converga.

PROPOSIZIONE 2 a- Un sottoinsieme E di uno spazio topologico X , con base numerabile di interni per ogni punto, è chiuso se e solo se è chiuso per successioni.

b- Un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto (rispetto alla topologia indotta dallo spazio ambiente).

c- Un sottoinsieme E compatto di uno spazio topologico di Hausdorff X è chiuso.

d- Uno spazio metrico compatto è compatto per successioni (ogni successione di elementi di X ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di X).

e- Uno spazio metrico sequenzialmente compatto è completo (ogni successione di Cauchy è convergente). Quindi uno spazio metrico compatto è completo.

DIMOSTRAZIONE:

a- Un punto limite p di una successione di elementi di E è in particolare aderente ad E . Quindi $p \in \bar{E} = E$. Viceversa se $q \in \bar{E}$ ha la base numerabile di interni $U_n(q)$, per ogni n vi è $x_n \in E \cap U_n(q)$ quindi q è limite della successione x_n .

b- Un ricoprimento aperto (A) del sottoinsieme chiuso E è dato da $(O \cap E)$ ove (O) è una famiglia di aperti dello spazio ambiente X . Ma allora $(O) \cup \{X \setminus E\}$ è un ricoprimento aperto di X . Il sottoricoprimento finito di X dato dall'ipotesi di compattezza, intersecando i suoi elementi con E , da un sottoricoprimento finito di (A) .

c- Sia $p \notin E$: per ogni $x \in E$ si ha $x \neq p$ quindi per separazione vi sono U_x intorno aperto di x e $V_{x,p}$ intorno di p disgiunti.

Ora (U_x) è un ricoprimento aperto di E variare di $x \in E$. Quindi vi sono x_1, \dots, x_N per cui U_{x_1}, \dots, U_{x_N} ricopre E . Ma allora $\bigcap_{1 \leq j \leq N} V_{x_j, p}$ è un intorno di p contenuto in E . Quindi se $p \notin E$ si ha p esterno ad E per cui $\bar{E} \subsetneq E$.

d- Si considerano successioni di elementi di X con immagine infinita: altrimenti si hanno sottosuccessioni costanti e quindi convergenti.

- Data una siffatta (x_n) in X l'insieme dei valori x_n ha un punto di accumulazione in X : in effetti se ogni $y \in X$ non fosse di accumulazione vi sarebbe $r_y > 0$ per cui per ogni n : $y_n \notin B(y, r_y) \setminus \{y\}$. Ora $\{B(y, r_y)\}_{y \in X}$ è un ricoprimento aperto di X , considerato per compattezza un sottoricoprimento finito si ha per ogni n : $x_n \in X = \bigcup_{1 \leq i \leq N} B(y_i, r_i)$ ma questa unione può al più contenere un numero finito di valori della successione.

- Ora un punto di y accumulazione dei valori della successione è il limite di una sottosuccessione:

per ogni k vi è $n_k > n_{k-1}$ per cui $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k}) \setminus \{y\}$: induttivamente per ottenere $x_{n_{k+1}}$ si considera il raggio strettamente minore del minimo tra $\{\frac{1}{k+1}, d(x_1, y), \dots, d(x_{n_k}, y)\}$.

e- Sia (y_n) una successione di Cauchy: per sequenziale compattezza ha una sottosuccessione (y_{n_k}) , con $n_k > k$, convergente a $x_0 \in X$

Per la diseuguaglianza triangolare $d(y_k, x_0) \leq d(y_{n_k}, y_k) + d(y_{n_k}, y)$ e questi due addendi son infinitesimi per $k \rightarrow \infty$.

Prima di andar oltre conviene introdurre la nozione di *totale limitatezza*, che appunto ha molteplice uso in varie questioni concrete di compattezza e di convergenza.

DEFINIZIONE 1 (Totale Limitatezza) Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \exists x_1, \dots, x_N \in X \quad : \quad X = \bigcup_{k=1}^N B_d(x_k, \varepsilon)$$

Un tale insieme finito si dice ε -rete.

NOTA: - avere una ε -rete per qualche ε equivale ad esser spazio metrico limitato (contenuto in una palla).

- Se si considera un sottoinsieme $E \subset X$ come spazio metrico con la distanza indotta $d|_{E \times E}$ si ha che E è totalmente limitato (come spazio metrico) se e solo se:

$$\forall r > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \exists x_1, \dots, x_N \in E \quad : \quad E \subseteq \bigcup_{k=1}^N B_d(x_k, r)$$

Essendo un'implicazione diretta, in quanto $E \subseteq X$ e le palle di E son palle di X intersecate con E , si osserva che per avere una ε -rete con centri in E basta scegliere punti di E in ogni palla di $\frac{\varepsilon}{2}$ -rete con centri in X che ricopre E .

PROPOSIZIONE 3 a- Uno spazio metrico totalmente limitato è separabile (ha un sottoinsieme numerabile denso).

b-Uno spazio metrico sequenzialmente compatto è totalmente limitato. Quindi uno spazio metrico compatto è completo e separabile.

c- Uno spazio metrico totalmente limitato è quasi sequenzialmente compatto (da ogni successione se ne estrae una di Cauchy).

d- Uno spazio metrico separabile è numerabilmente compatto (ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento numerabile).

e- Uno spazio topologico sequenzialmente compatto e numerabilmente compatto è compatto

DIMOSTRAZIONE:

a- per $k \in \mathbf{N}$ vi è $N_k \in \mathbf{N}$ e una $\frac{1}{k}$ -rete: $c_1^k, \dots, c_{N_k}^k \in X$, l'unione delle palle con tali centri e raggio $\frac{1}{k}$ ricopre l'intero X . La famiglia numerabile densa è data da $\bigcup_k \{c_1^k, \dots, c_{N_k}^k\}$.

b- Se non fosse totalmente limitato per qualche ε non vi sarebbe alcuna ε -rete. Quindi dato un qualsiasi $x_1 \in X$ vi sarebbe $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$ ed induttivamente per ogni $n \in \mathbf{N}$ vi sarebbe $x_{n+1} \notin \bigcup_{1 \leq k \leq n} B(x_k, \varepsilon)$. I valori di tale successione (x_n) sono reciprocamente a distanza maggiore o eguale a ε e non potrebbe avere sottosuccessioni convergenti.

c- Si considerino delle $\frac{1}{k}$ -reti $\{c_1^k, \dots, c_{N_k}^k\}$ per $k \in \mathbf{N}$.

Basta considerare successioni (y_n) con un numero infinito di valori.

- Data una tale successione (y_n) di elementi di X si trovano per ogni k un elemento e^k della $\frac{1}{k}$ -rete, e si costruiscono induttivamente delle sottosuccessioni (y_n^k) in modo che (y_n^{k+1}) sia sottosuccessione di (y_n^k) e (y_n^k) sia a valori $\bigcap_{1 \leq j \leq k} B(e^j, \frac{1}{j}) \cap X$.

Si inizia da (y_n) e $k = 1$: vi è e^1 un centro delle palle $\{B(c_j^1, 1)\}_{1 \leq j \leq N_1}$ (che sono in numero finito mentre l'immagine della successione è infinita) per cui infiniti valori della successione (in particolare per infiniti indici) sono in $B(e^1, 1)$. Numerando tali valori si ottiene la prima sottosuccessione (y_n^1) . Sostituendo a (y_n) la (y_n^k) si ottengono e^{k+1} e (y_n^{k+1}) .

- Per l'ulteriore sottosuccessione "diagonale" y_n^n si ha $y_n^n \in \bigcap_{1 \leq j \leq n} B(e^j, \frac{1}{j})$. Quindi tale sottosuccessione è di Cauchy $d(y_{n+k}^n, y_n^n) \leq \frac{2}{n}$.

d- Sia $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un denso in X numerabile. Sia quindi \mathcal{A} un ricoprimento di aperti di X .

Dato $x \in X$ vi è $A_x \in \mathcal{A}$ per cui $x \in A_x$. Sia $d_x = \text{dist}(x, X \setminus A_x) = \inf\{d(x, y) : y \notin A_x\}$.

Vi è k per cui $\frac{1}{k} < \frac{d_x}{2}$ e vi è e_n per cui $d(x, e_n) < \frac{1}{k}$. Si ha $B_x =: B(e_n, \frac{1}{k}) \subset B(x, d_x) \subset A_x$.

Ora la famiglia $(B_x)_{x \in X}$ è numerabile poichè è contenuta in $(B(e_n, \frac{1}{k}))_{(n,k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$. Sia $(B^m)_{m \in \mathbf{N}}$ una sua numerazione: per ogni $m \in \mathbf{N}$ si scelga $A^m \in \mathcal{A}$ per cui $B^m \subset A^m$. Tale sottofamiglia numerabile di \mathcal{A} ricopre X : $\forall x \exists m_x x \in B^{m_x} \subseteq A^{m_x}$.

e- Sia \mathcal{B} un ricoprimento aperto. Sia $\mathcal{A} =: (A_n)$ un sottoricoprimento numerabile, sia $\{I_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ una numerazione delle parti finite dei naturali e si ponga $\mathcal{A}_m = \{A_i\}_{i \in I_m}$.

Se X non fosse compatto induttivamente si costruisce (y_n) *iniettiva* per cui $y_n \notin \bigcup_{1 \leq k \leq n} \bigcup_{A_k}$. Data una sua sottosuccessione convergente (y_{n_k}) si avrebbe appunto $y_{n_k} \rightarrow x$, d'altronde $\exists N x \in A_N$ aperto e quindi definitivamente $y_{n_k} \in A_N$, ma $\{A_N\} = \mathcal{A}_m$ per qualche m e in particolare per $n_k > m$ si avrebbe anche $y_{n_k} \notin \bigcup_{A_m} = A_N$.

Dalle Proposizioni 2de, 3b per un'implicazione e dalla Proposizione 3cde per l'altra si ottiene:

TEOREMA 4: Dato (X, d) metrico: compatto \iff totalmente limitato & completo.

COROLLARIO 5: Se (X, d) è metrico completo e $E \subseteq X$ allora:

E relativamente compatto \iff totalmente limitato.

ASCOLI-ARZELÀ: Sia (K, d) metrico compatto ed $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbf{R})$ allora:

\mathcal{F} relativamente compatta se e solo se

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{x \in K} |f(x)| = C < \infty \quad (\text{equilimitata})$$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{d(x,y) \leq \delta} |f(x) - f(y)| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (\text{equiuniformemente continua})$$

DIMOSTRAZIONE: Dato ε sia δ per cui $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{d(x,y) \leq \delta} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Sia $\{k_1, \dots, k_m\}$ una δ -rete di K e $\{v_1, \dots, v_n\}$ una ε -rete per l'unione delle $\{f(k_1), \dots, f(k_m)\}$ al variare di $f \in \mathcal{F}$ contenuta in $[-C; C]$.

Per ogni $J = (j_1, \dots, j_m)$, $j_i \leq n$, se vi sono $f \in \mathcal{F}$ per cui $|f(k_i) - v_{j_i}| \leq \varepsilon$ per ogni $1 \leq i \leq m$, se ne seleziona una $f_J \in \mathcal{F}$ (pittoricamente: considerando $K \times [-C; C]$ "quadrettato" dai prodotti delle palle con centri le reti, si considerano le $f \in \mathcal{F}$ i cui grafici intersecano tutti i $B(k_i, \delta) \times [v_{j_i} - \varepsilon, v_{j_i} + \varepsilon]$ e se ne sceglie una). La famiglia finita (f_J) è una 4ε -rete per \mathcal{F} .

$\forall g \in \mathcal{F} \exists J^g \forall i |f(k_i) - v_{j_i^g}| \leq \varepsilon, \forall x \exists i_x \sup_{\mathcal{F}} |f(x) - f(k_{i_x})| \leq \varepsilon:$

$$|g(x) - f_{J^g}(x)| \leq |g(x) - g(k_{i_x})| + |g(k_{i_x}) - v_{j_{i_x}^g}| + |v_{j_{i_x}^g} - f_{J^g}(k_{i_x})| + |f_{J^g}(k_{i_x}) - f_{J^g}(x)|.$$