Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

Soluzione dell'esercizio 16b del II foglio di esercizi

ESERCIZIO n.16 a- Se f è misurabile su M di misura finita allora $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$ [Si consideri prima il caso in cui $\|f\|_p < \infty$].
b- Sia M misurabile qualsiasi, se per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$, allora in M $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$.
c- Se M ha misura 1 e per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$ allora in M $\lim_{p\to 0}\|f\|_p = \exp\left(\int_M \log|f|dm\right)$.

PREMESSA INTUITIVA: nel caso di una funzione a due valori a ,b assunti su insiemi di egual misura: $|f|_p = ((|a|^p + |b|^p)\frac{m(M)}{2})^{\frac{1}{p}} \to \max\{|a|, |b|\}$ per $p \to \infty$.

a-b-I Si tratta per primo il caso $|f|_\infty < +\infty$.

a- (Come visto a lezione) Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi, usando la diseguaglianza di Tschebyshev.

$$m(M)^{\frac{1}{p}}|f|_\infty \geq |f|_p \geq \left(\int_{\{|f|\geq|f|_\infty-\varepsilon\}}|f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \geq (|f|_\infty - \varepsilon)m(\{|f| \geq |f|_\infty - \varepsilon\})^{\frac{1}{p}}$$

Affinchè l'ultimo minorante sia utile va dimostrato che $m(\{|f| \geq |f|_\infty - \varepsilon\}) > 0$: questo è vero per definizione di $|f|_\infty$ (se $\{|f| < |f|_\infty - \varepsilon\}$ avesse misura piena: $|f|_\infty - \varepsilon > |f|_\infty$).

Al limite per $p \to \infty$ si ha per ogni $\varepsilon > 0$: $|f|_\infty \geq \limsup\limits_{p\to\infty}|f|_p \geq \liminf\limits_{p\to\infty}|f|_p \geq |f|_\infty - \varepsilon$.

b- Come[1] nel punto a- si cerca di minorare e maggiorare $|f|_p$ con $|f|_\infty$.

b.1- Si dimostra $\liminf\limits_{p\to\infty}|f|_p \geq |f|_\infty$: come sopra per la diseguaglianza di Tschebyshev si ha

$$|f|_p \geq (|f|_\infty - \varepsilon)m(\{|f| \geq |f|_\infty - \varepsilon\})^{\frac{1}{p}}$$

b.2- Si dimostra[2] $\limsup\limits_{p\to\infty}|f|_p \leq |f|_\infty$: come per il punto a- si maggiora $|f|_p$ con $|f|_\infty$:

$$|f|_\infty^{1-\frac{s}{p}}|f|_s^{\frac{s}{p}} = |f|_\infty^{1-\frac{s}{p}}\left(\int|f|^s dm\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int|f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = |f|_p$$

Come in a- per $p \to \infty$ si ha per ogni $\varepsilon > 0$: $|f|_\infty \geq \limsup\limits_{p\to\infty}|f|_p \geq \liminf\limits_{p\to\infty}|f|_p \geq |f|_\infty - \varepsilon$.

a-b-II Se $|f|_\infty = \infty$ si considera $f_n = (f \wedge n) \vee (-n)$. Si ha $|f_n|_\infty = n$, $|f| \geq |f_n|$ e quindi :

$$\text{per ogni } n \qquad \liminf_{p\to\infty}|f|_p \geq \liminf_{p\to\infty}|f_n|_p = n \to +\infty$$

---

[1] La dimostrazione di b.1 vista a lezione usava invece l'approssimazione con funzioni a supporto di misura finita (idea fuorviante per la maggiorazione in b.2):
Siano $M_R = M \cap B_R$, ove $B_R = \{x : |x| \leq R\}$: M_R è crescente per l'inclusione e $\bigcup_{R>0} M_R = M$. In particolare la famiglia di funzioni misurabili crescenti $|f|\chi_{M_R} \uparrow |f|$ per $R \to \infty$.
Si ha: $|f|_p \geq |f\chi_{M_R}|_p$, quindi per il punto a- si ha per ogni R:

$$\liminf_{p\to\infty}|f|_p \geq \lim_{p\to\infty}|f\chi_{M_R}|_p = |f\chi_{M_R}|_\infty \to |f|_\infty \quad R \to \infty$$

(Comunque sarebbe stato meglio e più generale è considerare $M_n = \{\frac{|f|_\infty}{n+1} < |f|\}$ sono di misura finita, per la diseguaglianza di Tschebyshev con $|f|^s$, e danno come unione crescente $\{|f| > 0\}$ che è il dominio effetivo ove si valutano le norme.)

[2] Come *non* si è visto a lezione.