ESERCIZIO n. 1 Si tracci il grafico di $arsin(|x|-2)$.

ESERCIZIO n. 2 In figura è riportatato il diagramma cumulativo delle frequenze di un campione numerico. Si determinino i valori di mediana e il valore medio del campione.

ESERCIZIO n. 3 Per la prova di ammissione ad un concorso vengono estratti a sorte su 8 candidate e 7 candidati i primi tre esaminati. Con che probabilità vi sono solo 2 maschi?

ESERCIZIO n. 4 Quattro studenti riportano rispettivamente i seguenti voti nei test autovalutativi di ingresso e nella prima prova in itinere di matematica: (16, 24, 18, 22) e (14, 26, 20, 20). Si calcoli la correlazione.

ESERCIZIO n. 5 Si risolvano in **C**: a) $w^2 - iw - 1 = 0$, b) $z^4 - iz^2 - 1 = 0$.

ESERCIZIO n. 6 Un gioco con un dado si svolge come segue:

-se ad un lancio esce 6 non si vince niente e si fa un altro lancio,

-invece appena esce 6 il gioco termina e si vincono 2^n euro se questo lancio è l'n^o lancio dall'inizio del gioco (il primo in cui non esce 6).

Qual'è la vincita media?

ESERCIZIO n.7 Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,0)$.

ESERCIZIO n.8 Assumendo che $\pi \geq 3$ a che cifra decimale basta troncare π per valutare la lunghezza di una circonferenza con errore relativo minore dell' 1% se il raggio è anch'esso valutato per difetto con la stima 20 m ed errore $16cm$?

• ESERCIZIO n.9 Nell'organismo umano quotidianamente viene espulso il 40% della quantità presente in esso di una certa sostanza tossica che dà i primi sintomi di intossicazione se presente almeno con $0,1mg$ per kg di massa corporea. Se un individuo di peso $70kg$, che inizialmente non ha alcun accumulo di tale sostanza, inizia ad assumerla in ragione di $3mg$ al giorno dopo quanti giorni sviluppa la sintomatologia? E uno di $75kg$?

• ESERCIZIO n.10 Misurando i due lati di uno stanzino rettangolare si ottengono i valori di 2 metri e 3 metri. Si sa solo che la somma dei due errori è di 1 centimetro. Qual'è l'errore massimo che si commette dando come valutazione dell'area 6 metri quadrati?

• ESERCIZIO n.11 In una sperimentazione clinica ogni giorno ad ogni paziente viene somministrato, con probablità 1/3, il farmaco piuttosto che un placebo.

a- Con che probabilità un paziente assume il farmaco almeno 4 volte in una settimana?

b- Se i pazienti sono 3 con che probabilità ad almeno un paziente viene somministrato il farmaco almeno 4 volte nella settimana?

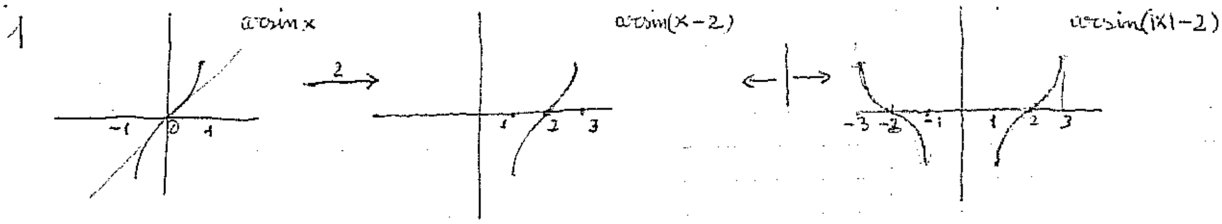
• ESERCIZIO n.12 In una sperimentazione clinica ogni giorno ad ogni paziente viene somministrato casualmente, con egual probabilità, o il farmaco o un placebo.

a- Con che probabilità un paziente non assume mai il farmaco in una settimana?

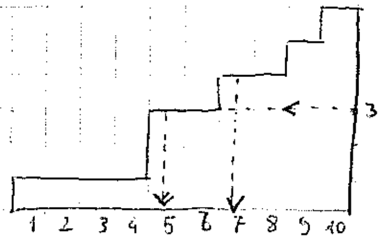
b- Se i pazienti sono 1024 qual'è la media del numero di pazienti a cui viene somministrato il farmaco almeno una volta in una settimana?

Soluzione ai quesiti della prova di recupero 12 Febbraio 2010

1

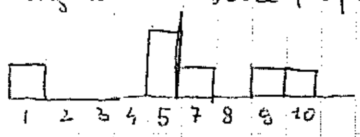


2



numero dei valori effettivamente campionati 6

diagramma delle frequenze associato:



$x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 5$
$x_4 = 7,\ x_5 = 9,\ x_6 = 10$

valori di mediana $\{5, 7\} = \{x_3, x_4\}$, media $= \frac{1+5+5+7+9+10}{6} = \frac{37}{6}$

3

$\frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} = p$. casi possibili = scelte di 3 su 15

$\#$ casi possibili $= \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\cdot\overset{7}{\cancel{14}}\cdot 13}{\cancel{3!}} = 5\cdot 7\cdot 13$

casi favorevoli = scelte di due maschi su 3 scelti

$\#$ " " $= \#(\text{scelte di 2 su 7})\cdot\#(\text{scelte di 1 su 8}) = \frac{7\cdot 6}{\cancel{2}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}} = 7\cdot 6\cdot 4$

$p = \frac{7\cdot 6\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 13} = \frac{168}{455} \sim 0{,}37$

4

					MEDIA					
X	16	18	22	24	20	X CENTRATO	−4	−2	2	4
Y	14	20	20	26	20	Y CENTRATO	−6	0	0	6

					V	σ
$(X-M)^2$	16	4	4	16	10	$\sqrt{10}$
$(Y-M)^2$	36	0	0	36	18	$3\sqrt{2}$

$\text{corr} = \frac{12}{6\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$(X-M)(Y-M)$ 24 0 0 24 $\quad \frac{1}{4}\sum(X-M)(Y-M) = 12$

5. $z^4 - iz^2 - 1 = 0$; $z^2 = w$ e $w^2 - iw - 1 = 0$

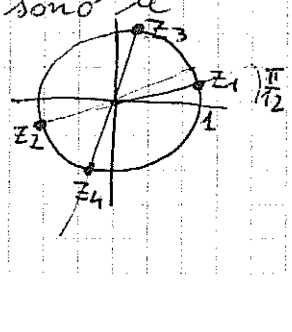
a) $w \in \frac{i \pm\sqrt{(-i)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{i \pm\sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$w \in \left\{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\ ;\ \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right\}$ quindi z sono le

b) radici quadrate di $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e di $e^{i\frac{5}{6}\pi}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\quad z_2 = e^{i(\frac{\pi}{12}+\pi)} = e^{i\frac{13}{12}\pi}$

$z_3 = e^{i\frac{5}{12}\pi}$ $\quad z_4 = e^{i(\frac{5}{12}\pi+\pi)} = e^{i\frac{17}{12}\pi}$



6. V = vincita : assume una successione di valori, quindi

$$\langle V \rangle = \sum v \cdot P(V=v)$$

$P(V=v) = 0$ se v non è una potenza di 2

$P(V=1) = 0$

$P(V=2^n) = P($ primo lancio viene 6 e secondo lancio viene 6 ... ... $(n-1)°$ lancio viene 6 e $n°$ lancio <u>non</u> viene 6 $)$

= eventi indipendenti =

$= P(\text{primo lancio } 6) \cdots P((n-1)° \text{ lancio } 6) \cdot P(n° \text{ lancio non } 6) =$

$$= \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6^{n-1}} \frac{5}{6} = \frac{5}{6^n}$$

$$\langle V \rangle = \sum_{n>0} \frac{2^n}{6^n} 5 = 5 \sum_{n>0} \frac{1}{3^n} = 5\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{5}{2}$$

7. area triangolo vertici $(1,1,1), (1,-1,-1), (0,1,0)$ =

traslo di $(0,1,0)$ = area triangolo di vertici

$$(1,0,1), (1,-2,-1), (0,0,0)$$

con $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,-2,-1)$

$= \frac{1}{2}$ lunghezza v_1 · lunghezza v_2 · |seno angolo compreso|

$$= \frac{1}{2} |v_1| \cdot |v_2| \sqrt{1 - (\cos \widehat{v_1 O v_2})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2}\sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{(v_1 \circ v_2)^2}{|v_1|^2 |v_2|^2}} = \sqrt{3}$$

- osservazione se ci si accorgeva subito che
  $(1,0,1) \circ (1,-2,-1) = 1 \cdot 1 + 0(-2) + 1 \cdot (-1) = 0$
  il triangolo essendo rettangolo si otteneva subito

$$\text{area} = \frac{1}{2} |v_1| \cdot |v_2| = \sqrt{3}$$

- oppure

area triangolo vertici $(1,0,1), (1,-2,-1), (0,0,0)$ =

$= \frac{1}{2}$ area parallelogramma $(2,-2,0), (1,0,1), (1,-2,-1), (0,0,0)$

$$= \frac{1}{2} \left| (1,0,1) \times (1,-2,-1) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{3}$$

8 $2000\,cm \le R \le 2000+16\,cm$ $\qquad e_R^{rel} = \frac{16}{2000} = \frac{1}{125}$

$$V \le \pi \le V + e \qquad 0 \le e \le 10^{-n} \qquad e_\pi^{rel} = \frac{e}{V} \le \frac{10^{-n}}{3}$$

$$2000 \cdot V \le \pi R \le 2000V + 16 \cdot V + e2000 + 16 \cdot e$$

errore relativo = somma errori relativi + prodotto errori relativi =

$$= \frac{1}{125} + \frac{e}{V} + \frac{e}{V}\cdot\frac{1}{125} \le \frac{1}{125} + 10^{-n}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\overset{42}{\cancel{126}}}{125}$$

imponendo questa stima minore di $\frac{1}{100}$ si deve avere

$$10^{-n} \le \frac{125}{42}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{125}\right) = \frac{\cancel{125}}{42}\,\frac{\cancel{25}}{\cancel{125}\cdot\underset{4}{\cancel{100}}} = \frac{1}{168} \quad \text{cioè } 10^n \ge 168$$

per cui basta $n = 3$.

9 Sia S_n = quantità di sostanza tossica, in milligrammi, massima accumulata nel giorno $(n+1)^\circ$

$$S_0 = 3 \qquad S_1 = S_0 \cdot \frac{60}{100} + 3 = 3\left(1 + \frac{3}{5}\right) \qquad S_{n+1} = S_n \cdot \frac{3}{5} + 3 = S_{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{5} + 3 = \dots = 3\left(1 + \frac{3}{5} + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$$

quindi $S_n = 3\left(1 + \frac{3}{5} + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) =$

$$= 3\,\frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{15}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$$

La quantità di sostanza che fa presentare i sintomi in un individuo di 70 Kg è $0{,}1 \times 70 = 7$ mg

va trovato $n+1$ per cui

$$S_n = \frac{15}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) \ge 7 \quad \text{cioè} \quad 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \ge \frac{70}{75}$$

cioè $\frac{5}{75} \ge \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ cioè $\frac{1}{15} \ge \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ cioè

$$5^n \ge 3^{n+2} \qquad \overset{n=0}{5^0 = 1 \not\ge 9 = 3^{0+2}}, \quad \overset{n=1}{5 \not\ge 27 = 3^{1+2}}, \quad \overset{n=2}{25 \not\ge 27\cdot 3}$$

$$\overset{n=3}{125 \not\ge 3^{3+2} = 243}, \quad \overset{n=4}{625 \not\ge 729}, \quad \underline{\overset{n=5}{5^5 = 3125 \ge 2187}}$$

Quindi dopo $5+1 = 6$ giorni l'individuo presenta il sintomo.

Se invece pesasse 75 Kg, la quantità necessaria per presentare il sintomo sarebbe 7,5 mg

ma non può mai essere $S_n \ge 7{,}5$

poiché $S_n = 7{,}5\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) < 7{,}5$.

10 La misura del primo lato sia 2 metri

$L_1 = 2\,m \pm e_1\,cm = 200 \pm e_1$ cm analogamente per il secondo lato

$L_2 = 300 \pm e_2$ cm $\qquad e_1, e_2 \geq 0$

si sa $e_1 + e_2 = 1$ cm . $\qquad 0 \leq e_1, e_2 \leq 1$

$$\text{Area} = L_1 \cdot L_2 = 200 \cdot 300 + e_1 e_2 \pm (200 e_2 + 300 e_1)\ cm^2$$
$$= 6 \cdot 10^4 \pm (e_1 e_2 + 200 e_2 + 300 e_1)\ cm^2$$

Posto

$e = e_1$ dall'ipotesi $e_2 = 1 - e$ cm

quindi la valutazione massima dell'errore è

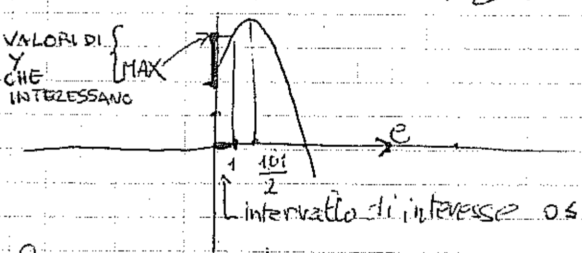
massimo $e(1-e) + 200(1-e) + 300e$ se $0 \leq e \leq 1$

massimo $-e^2 + 101e + 200$ se $0 \leq e \leq 1$

massimo $200 + \left(\frac{101}{2}\right)^2 - \left(e - \frac{101}{2}\right)^2$ se $0 \leq e \leq 1$

se non vi fosse la condizione il massimo sarebbe quando $e = \frac{101}{2} > 1$, e il massimo sarebbe $200 + \left(\frac{101}{2}\right)^2$. Ma $e \leq 1$ quindi il massimo è preso per $e = 1$

infatti $y = 200 + \left(\frac{101}{2}\right)^2 - \left(e - \frac{101}{2}\right)^2$ ha grafico di questo tipo



Quindi l'errore massimo è $-1 + 101 + 200 = 300\ cm^2$ assunto quando $e_1 = 1$ ed $e_2 = 0$

11 a - M = numero di volte in una settimana in cui il paziente assume il farmaco

è la variabile che interessa, la sua distribuzione è quella di una binomiale di parametri 7 e p basata sullo schema successo/insuccesso

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente assume il farmaco in un dato giorno} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{3}$$

Quindi $\mathbb{P}(M \geq 4) = \mathbb{P}(M=4 \text{ o } M=5 \text{ o } M=6 \text{ o } M=7) =$

$= [\text{essendo eventi disgiunti}]\ \mathbb{P}(M=4) + \mathbb{P}(M=5) + \mathbb{P}(M=6) + \mathbb{P}(M=7) =$

$$= \binom{7}{4}\frac{1}{3^4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{7}{5}\frac{1}{3^5}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{7}{6}\frac{1}{3^6}\left(\frac{2}{3}\right) + \binom{7}{7}\frac{1}{3^7} =$$

$$= \frac{1}{3^7}\left[\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3\cdot 2}}\cdot 2^3 + \frac{7\cdot 6}{2}\, 2^2 + 7\cdot 2 + 1\right] = \frac{1}{3^7}\left[7\cdot 5\cdot 8 + 7\cdot 6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 1\right]$$

$$= \frac{379}{3^7} = \frac{14}{3^4} + \frac{1}{3^7} = \frac{4}{27} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^7} \sim 0{,}175 \pm 3\cdot 10^{-3}$$

b -

$\bar{p} = \mathbb{P}$(almeno un paziente sui 3 presenti assume il farmaco almeno quattro volte) =

$= 1 - \mathbb{P}$(<u>ogni</u> paziente sui tre presenti <u>non</u> assume il farmaco almeno quattro volte)

POSTO M_i = numero di volte in una settimana in cui il paziente i^o assume il farmaco $\quad 1 \leq i \leq 3$

$$= 1 - \mathbb{P}(M_1 < 4 \text{ e } M_2 < 4 \text{ e } M_3 < 4) = [\text{eventi indipendenti}]$$

$$= 1 - \mathbb{P}(M_1 < 4)\cdot\mathbb{P}(M_2 < 4)\,\mathbb{P}(M_3 < 4) = [\text{equidistribuite}]$$

$$= 1 - (\mathbb{P}(M_1 < 4))^3 \approx$$

ma $\mathbb{P}(M_1 < 4) = 1 - \mathbb{P}(M_1 \geq 4) = 1 - \frac{379}{3^7} \sim 0{,}825$

$$\approx 1 - (0{,}825)^3 \sim 1 - 0{,}43 = 0{,}57 \pm 10^{-2}$$

12 a. M = numero di volte in una settimana in cui il paziente assume il farmaco

ha distribuzione binomiale di parametri 7 e p basata sullo schema successo insuccesso

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente assume il farmaco in un dato giorno} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$$

Quindi $\mathbb{P}(M=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

b. N = numero di pazienti a cui viene somministrato il farmaco almeno una volta nella settimana

dovendo calcolare $\langle N \rangle$, essendo la media lineare conviene vedere N come somme di grandezze più semplici

$$N = P_1 + P_2 + \dots + P_{1024}$$

$$P_i = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente } i^\circ \text{ prende almeno una volta il farmaco nella settimana} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad 1 \le i \le 1024$$

$$\langle N \rangle = \langle P_1 \rangle + \dots + \langle P_{1024} \rangle = 1024 \cdot \langle P_1 \rangle$$ essendo equidistribuite

ora

$$\langle P_1 \rangle = \underbrace{\text{somma al variare di } v \text{ di}}\ v \cdot \mathbb{P}(P_1 = v) =$$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}(P_1=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(P_1=1) = \mathbb{P}(P_1=1)$$

per calcolare $\mathbb{P}(P_1=1)$ si osserva che

il paziente non prende il farmaco nella settimana cioè $P_1 = 0$ se e solo se $M=0$

$$\mathbb{P}(P_1=1) = 1 - \mathbb{P}(P_1=0) = 1 - \mathbb{P}(M=0) = 1 - \frac{1}{2^7} = \langle P_1 \rangle$$

Quindi

$$\langle N \rangle = 1024\left(1 - \frac{1}{2^7}\right) = 2^{10}\left(1 - 2^{-7}\right) = 2^{10} - 2^3 =$$

$$= 1024 - 8 = 1016.$$