Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2003-2004
Laurea specialistica in Informatica
R.Stasi, V.M. Tortorelli

III foglio di esercizi
dal 10 marzo 2004 al 16 marzo

ESERCIZIO n. 1 Si consideri un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili x ed y. Se ne calcoli il differenziale e il differenziale secondo. Si mostri in generale che se A è una matrice $n \times n$ la funzione $x \in \mathbf{R}^n \mapsto \langle Ax \cdot x \rangle$ ha differenziale secondo eguale a ${}^tA + A$.

ESERCIZIO n. 2 Sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Dato il cambio di coordinate $(u, v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, esprimere $g(x, y)$ in funzione di u e v .

ESERCIZIO n. 3 Sia $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque ed $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da:

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

Verificare che:

$$(F_\rho(\rho, \theta))^2 + \frac{1}{\rho^2}(F_\theta(\rho, \theta))^2 = (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2$$

dove $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$.

ESERCIZIO n.4 Determinare i punti critici ($df_P = O$) delle seguenti funzioni: $x^3 + (x - y)^2$, $x^4 + (x - y)^2$, $xy + y^2 - 3x$, $\sin(x + y)$, $x^2 - \sin y$, $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

ESERCIZIO n. 5 Si dica se $(0, 0)$ è di massimo, di minimo o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

ESERCIZIO n. 6 Sia $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia x_0 tale che $df_{x_0} \neq O$. Dimostrare che la direzione u rispetto a cui:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0} = \max\left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{x_0} : \ v \in \mathbf{R}^n, \|v\| = 1 \right\}$$

è data da $u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ (ovvero il gradiente di una funzione differenziabile da la direzione di massima crescita).

ESERCIZIO n.7 Qual'è la massima distanza del pumto $(3, 5, 7)$ dai punti dell'insime $\{(x, y, z) : \ |x| + |y| + |z| \leq 1\}$? E dall'insieme $\{(x, y, z) : \ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1\}$?

ESERCIZIO n. 8 (a) Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1, 1, 1)$ e raggio 1 in $(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.
(b) Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x, y, z) : \ \log(x^2 + y^2 + e) = e^z\}$ in $(0, 0, 1)$.

ESERCIZIO n. 9 Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x, y, z) : \ 2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4\}$, $\{(x, y, z) : \ 1 + x^2 + y^2 = z^2\}$, $(0, 0, 1)$;
$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = e^z\}$, $\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = e^y\}$, $(1, 0, 0)$;
$\{(x, y, z) : \ xy = z \}$, $\{(x, y, z) : \ \cos(2\pi xy) = z\}$, $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO n.10 Dato $C \subseteq \mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x,y) \;=\; \inf_{(a,b)\in C} \sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C é differenziabile:
(a) $C=\{(0,0)\}$; (b) $C=\{(-1,0),(0,1)\}$; (c) $C=\{(-1,0)\}\cup\{(1,b): b\in\mathbf{R}\}$; (d) $C=\{(-1,0)\}\cup\{(a,b):(a+1)^2+b^2=1\}$.

ESERCIZIO n. 11 (a) La funzione $f(x,y)=\binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva? Si calcoli il suo differenziale e si studi dove è invertibile.

(b) Sia $f(x,y)=\binom{x^2+y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si calcoli il suo differenziale e si studi dove è invertibile.

ESERCIZIO n.12 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

xy su $\{x^2+y^2\leq 1\}$, $\quad x^2+y^2-(x+y)$ su $\{|x|\leq 1, |y|\leq 1\}$

$\displaystyle\int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2}dt$ su $\{|x|\leq 1, |y|\leq 1\}$,

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+4y^2}+x & xy>0 \\ \\ xy+x & xy\leq 0 \end{cases} \qquad \text{su} \quad \{0\leq y\leq 1, y^2-1\leq x\leq 1\}$$

ESERCIZIO n.13 Sia $f(x,y)=2x^4-x^2e^y+e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2+y^2\to+\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f=c$, al variare di c in $\mathbf{R}$, mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n.14 Sia data un insieme di coppie $(x_i,y_i)_{1\leq i\leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione: $\chi^2(a,b)=\sum_{i=1}^{N}(y_i-ax_i-b)^2$ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?

ESERCIZIO n.15 Sia f differenziabile su A aperto. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f é positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx)=t^\alpha f(x)$ per ogni $x\in A$).
- $\alpha f(x)=x\cdot\nabla f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_if_{x_i}(x)$ per ogni $x\in A$.

ESERCIZIO n. 16 Sia $R:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ una rotazione di centro l'origine, cioè una applicazione lineare del tipo $x\mapsto Rx$, con ${}^tRR=Id$, ovvero $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

Detto $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u\circ R)=(\Delta u)\circ R$ per ogni $u\in C^2$.