

Complementi di Analisi Matematica

Anno Accademico 2005-2006

Laurea specialistica in Informatica

V.M. Tortorelli

I prova scritta finale, 6 giugno 2006

I PARTE: si dia la risposta alle seguenti domande senza giustificazione:

1- Si considerino gli spazi normati $A = C([0, 1], \mathbf{R})$, $|f|_A = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ e $B = C^1([0, 1], \mathbf{R})$, $|f|_B = \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |g'(t)|$.

Si calcoli la norma dell'operatore lineare $F : f \in A \mapsto F[f] = g \in B$ definito da

$$g(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right) dt$$

R.:

2 - Si calcoli il limite $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\log \cos xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$.

R.:

3- Si dica se la successione di funzioni $f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2} dy$ converge uniformemente per $x \geq 0$.

R.:

4- Si consideri $f(x, y) = e^{x+y} - xy$: si calcoli $\frac{\partial x}{\partial y}(0)$ nell'intorno del punto $(1, 1)$.

R.:

5- Si trovino i punti critici di $f(x, y, z) = x^2(1 - y)^2(z + \frac{1}{2})^2$ e se ne determini la natura.

R.:

6- Si calcolino i valori di massimo e minimo di $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ per $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 1$.

R.:

Complementi di Analisi Matematica

Anno Accademico 2005-2006

Laurea specialistica in Informatica

V.M. Tortorelli

I prova scritta finale, 6 giugno 2006

II PARTE: si risolvano i seguenti problemi dando in modo esauriente le opportune giustificazioni:

Si consideri lo spazio normato $A = C([0, 1], \mathbf{R})$, $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Detto $F : f \mapsto F[f] = g$ l'operatore definito da $g(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt$, si dimostri che:

a- F trasforma elementi di A in elementi di A

b- F è continuo

c- F è differenziabile in $f(x) \equiv 0$, determinando l'operatore lineare $d_0 F$ mediante le derivate direzionali di F e considerando quindi lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale in una variabile.