Elementi di Analisi Matematica II, Anno Accademico 2002-2003, Matematica

G. Albert, A. Briani, V.M. Tortorelli

VII foglio di esercizi: V.M. Tortorelli

dal 30 aprile 2003 al 21 maggio 2003

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html $\longrightarrow$ El. di An. Mat. I e II A.A. 2002/03

LEMMA $a_1,\ b_1,\ \ldots,\ b_n \in \mathbf{C}\quad \sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=m}^{n} b_k - \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{j=m}^{k} b_j$

TEOREMA

a - $a_n \to 0,\ \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty,\ \sup_{n\in\mathbf{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \le M < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ converge

b - $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty,\ \sum_{k=0}^{n} b_k$ converge $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ converge

---

ESERCIZIO n. 1 Si mostri che la serie $\sum_n \frac{\cos nx}{\sqrt{n}},\ x \notin 2\pi\mathbf{Z}$ è convergente.

ESERCIZIO n. 2 Si consideri la successione $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Si provi che pur essendo infinitesima e a segni alterni la sua serie non è convergente. Si mostri quindi che per le serie a termini di segno variabile non vale il criterio del confronto asintotico.

ESERCIZIO n. 3

a - Si provi mediante integrazione per parti e confronto che $\frac{\sin x}{x}$ ha integrale in senso generalizzato su $]0;+\infty[$ finito. Si provi che il suo valore assoluto non ha integrale finito.

b - Si provi che se $x \mapsto g(x)$ è una funzione definita su $[0;+\infty[$, decrescente ed infinitesima per $x \to +\infty$, e quindi non negativa, allora la funzione $g(x)\sin x$ ha integrale in senso generalizzato su $[0;+\infty]$ finito. Che dire sull'integrale di $|g(x)\sin x|$ su $[0;+\infty[$?

ESERCIZIO n. 4 Si studi l'integrabilità in senso generalizzato, ed eventualmente la convergenza degli integrali, su $]0;+\infty[$ delle funzioni $\sin(x^2)$, $\left(\sin\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2$ e $\sin\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

ESERCIZIO n. 5 Si calcolino le somme delle seguenti serie:

$$\sum_n n x^n,\ \sum_n \frac{x^n}{n},\ \sum_n \frac{x^{4n-1}}{4n-1},\ \sum_n \frac{x^{4n}}{4n-3},\ \sum_n \frac{(-x)^{n+1}}{n(n+1)},\ \sum_n \frac{1}{(2n)!},\ \sum_n \frac{(-1)^n}{2n+1},\ \sum_n \frac{n}{2^n},\ \sum_n \frac{(-1)^n}{n}.$$

ESERCIZIO n. 6 Si espliciti in termini di funzioni elementari $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n,\ 0 \le x \le 1$.

ESERCIZIO n. 7

a - Si studi il dominio di convergenza in $\mathbf{R}$ delle serie di potenze:

$$\sum_n x^{4n-2}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n}{n(n+1)}\ ,\quad \sum_n x^n 10^n\ ,\quad \sum_n \frac{(-x)^n}{n}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n}{n10^{n-1}}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n \sin n!}{n(n+4)}\ ,$$
$$\sum_n x^n n!\ ,\quad \sum_n x^{2(n-1)}2^{n-1}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n}{n(n+1)}\ ,\quad \sum_n \frac{(-x)^n}{n-\log n}\ ,\quad \sum_n \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}\ ,\quad \sum_n x^{n!}$$
$$\sum_n 2^n x^{n^2}.$$

b - Si determini il raggio di convergenza in $\mathbf{C}$ delle serie di potenze:

$$\sum_n z^n\ ,\quad \sum_n \frac{z^n}{n(n+1)}\ ,\quad \sum_n \frac{z^n}{n!}\ ,\quad (*)\ \sum_n \binom{\alpha}{n} z^n\ (\alpha \in \mathbf{C}).$$

ESERCIZIO n. 8

a - Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze seguente: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

b - Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze seguente: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^{(n^2)}}{(2n)!}$.

ESERCIZIO n. 9 Si studi il seguente problema di Cauchy per serie di potenze e si discuta la convergenza della serie determinata: $\begin{cases} (1+x^2)y''(x)+y(x)=0\ , & x\in\mathbf{R} \\ y(0)=\ y'(0)=1 & \end{cases}$