TERZO APPELLO, 12 GIUGNO 2003 – TESTI

I PARTE.

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{\log(x^3+1)}$.
2. Calcolare la primitiva di $\dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Calcolare la derivata di $x^{1-x}x^{1+x}$.
4. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $xy \geq 1$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\cos x\,dx$.
6. Trovare i punti critici di $f(x) := e^{x^3-3x^2-9x+1}$ e determinarne la natura.
7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot y + 2xy^2 = 0 \\ y(0)=1 \end{cases}$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x+e^{x-x^2})}{\log x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,(\log x)^2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\sin(1/x)$.

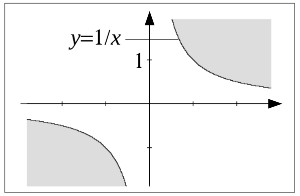
II PARTE.

1. Calcolare il volume dell'insieme V dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}$.
   [*Suggerimento: le intersezioni di V con i piani paralleli al piano xy sono cerchi.*]
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del problema $\begin{cases} \ddot y + 4y = \sin(ax) \\ y(0)=0 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases}$ sono illimitate.
3. Trovare il punto del grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ che minimizza la distanza dall'origine.
4. Sia a un numero reale positivo diverso da 0 e da 1.
   a) Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in 0 di $(1+x)^a$.
   b) Calcolare la parte principale per $x \to +\infty$ di $(x+1)^a + (x-1)^a - 2x^a$.
   c) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)^a + (x^3-1)^a - 2x^{3a}}{x^5}$.

Terzo appello, 12 giugno 2003 – Soluzioni

I Parte.

1. Deve essere $\log(x^3+1) \geq 0$, cioé $x^3+1 \geq 1$, cioé $x \geq 0$.
2. Usando il cambio di variabli $y = x^2$ si ottiene $\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$.
3. La funzione è uguale a x^2, ed ha derivata $2x$.
4. Si tratta della zona in grigio nella figura accanto.
5. La funzione $x\cos x$ è dispari, quindi l'integrale è 0.
6. $f'(x) = 3(x^2-2x-3)e^{x^3-3x^2-9x+1}$ si annulla in -1 (massimo locale) e 3 (minimo locale).
7. Si tratta dell'equazione a variabili separabili $\dot{y}/y^2 = -2x$, per cui $-1/y = c - x^2$. Ricordando che $y=1$ per $x=0$, abbiamo allora $-1/y = 1-x^2$, ovvero $y = 1/(x^2-1)$.
8. Rispettivamente 0, 0 e 1.



II Parte.

1. L'intersezione V_z di V con il piano parallelo al piano xy e passante per il punto $z > 0$ è l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $z \leq e^{-x^2-y^2}$, ovvero $x^2+y^2 \leq -\log z$. In altre parole, l'insieme vuoto per $z > 1$, ed un cerchio (pieno) di raggio $\sqrt{-\log z}$ per $0 < z < 1$. Pertanto il volume di V è
$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^1 \mathrm{area}(V_z)\,dz = \int_0^1 \pi(-\log z)\,dz = \pi\Big|z(1-\log z)\Big|_0^1 = \pi\ .$$

2. La soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 4y = 0$ è $y = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A questo punto, le soluzioni dell'equazione non omogenea
$$\ddot{y} + 4y = \sin(ax) \tag{1}$$
sono della forma
$$y = \bar{y} + \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$$
dove $\bar{y}$ è una qualunque soluzione particolare della (1). Pertanto, se $\bar{y}$ è limitata (risp. illimitata), allora *tutte* le soluzioni della (1) sono limitate (risp. illimitate) a prescindere dai dati iniziali. Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1) del tipo
$$\bar{y} = \gamma\sin(ax) + \delta\cos(ax)\ .$$
L'equazione diventa allora
$$(\gamma(-a^2+4)-1)\sin(ax) + \delta(-a^2+4)\cos(ax) = 0 \tag{2}$$
che è verificata se (e solo se) γ e δ soddisfano il sistema
$$\begin{cases} \gamma(-a^2+4)-1 = 0\ , \\ \delta(-a^2+4) = 0\ . \end{cases}$$
Per $a = \pm 2$ il sistema non è risolubile perché la prima equazione diventa $-1 = 0$. Per $a \neq \pm 2$, invece, il sistema ammette una ed una sola soluzione $\gamma = 1/(4-a^2)$ e $\delta = 0$. Ma allora $\bar{y}$, e di conseguenza *tutte* le soluzioni della (1), sono limitate.

Non resta che considerare i casi $a = \pm 2$. Proviamo a cercare una soluzione particolare del tipo
$$\bar{y} = \gamma x\,\sin(ax) + \delta x\,\cos(ax)\ .$$
Ricordando che $a^2 = 4$, l'equazione diventa allora
$$-(2a\delta + 1)\sin(ax) + 2a\gamma\cos(ax) = 0$$
che è verificata per $\gamma = 0$ e $\delta = -1/(2a)$. Siccome $\bar{y}$ è una funzione illimitata, ne deduciamo che per $a = \pm 2$ *tutte* le soluzioni di (1) sono illimitate.

3. I punti del grafico di ascissa x sono della forma $(x, 1/(1+x^2))$, e la loro distanza dall'origine (al quadrato) è
$$g(x) = x^2 + \frac{1}{(1+x^2)^2}\ .$$
Osserviamo ora che minimizzare la distanza o il suo quadrato è la stessa cosa. Inoltre, essendo g una funzione pari, possiamo limitarci a trovare i punti di minimo per $x \geq 0$. La derivata di g è
$$g'(x) = 2x\left(1 - \frac{2}{(1+x^2)^3}\right)$$
che si annulla per $x = 0$ e per $(1+x^2)^3 = 2$, ovvero $x = \sqrt{\sqrt[3]{2}-1}$, e dallo studio del segno si vede che g decresce prima di quest'ultimo punto, e cresce dopo, e quindi si tratta del punto di minimo assoluto. Pertanto i punti del grafico di f che minimizzano la distanza dall'origine sono quelli di ascissa
$$\pm\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}\ .$$

4. a) Un calcolo diretto dà $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.
b) Raccogliendo x^a ed utilizzando lo sviluppo al punto a) otteniamo
$$\begin{aligned} &(x+1)^a + (x-1)^a - 2x^a = \\ &\quad = x^a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^a + \left(1-\frac{1}{x}\right)^a - 2\right] \\ &\quad = x^a\left[1 + \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 - \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\right] \\ &\quad = a(a-1)\,x^{a-2} + o(x^{a-2})\ . \end{aligned}$$
Quindi la parte principale cercata è $a(a-1)\,x^{a-2}$.
c) Usando il punto b) ed il principio di sostituzione degli infinitesimi si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)^a + (x^3-1)^a - 2x^{3a}}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} a(a-1)x^{a-7} = \begin{cases} +\infty & \text{per } a > 7, \\ 42 & \text{per } a = 7, \\ 0 & \text{per } a < 7. \end{cases}$$

Commenti.

- Prima parte: molti errori negli esercizi 1 e 4, e questo è grave perché si tratta di nozioni di base! stranamente, quasi nessuno ha fatto il 6, che pure è molto semplice.
- Esercizio 2, seconda parte: alcuni hanno risolto l'equazione omogenea, e poi hanno trovato una soluzione particolare della non omogenea della forma $\bar{y} = \gamma \sin(ax) + \delta \cos(ax)$ senza accorgersi che qualcosa ve storto per $a = \pm 2$.
- Esercizio 3, seconda parte: alcuni hanno studiato la funzione $f(x)$, cosa che non era minimamente richiesta, e alla fine hanno detto che il punti di minima distanza dall'origine del grafico era quello di ascissa 0 (che non é vero) senza neanche darsi la pena di giustificarlo.
- Esercizio 4, seconda parte: tutti hanno fatto il punto a) – e ci mancherebbe! – senza poi capire come usarlo per fare i punti b) e c).